II Etude locale d'une courbe/ Etude asymptotique d'une suite

1 Développement limité et prolongement $\mathscr{C}^1$

En pratique : pour montrer que f est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$

On peut utiliser les développements limités pour chercher les limites de f et f'.

Exemple 1 *SF 11* — Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$

2 Développement limité et tangente

- **Cadre.** f est définie sur $I \setminus \{a\}$ et admet en a le DL_1 : $\quad f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$

Rappel : DL_1 et dérivabilité

-
-

SF 12 : DL_1 et tangente

- L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est $y = a_0 + a_1(x-a)$.
- Un DL d'ordre supérieur donne la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à sa tangente au voisinage de a.

Exemple 2 *Cas où la courbe de f traverse sa tangente : point d'inflexion* —

Etudier localement au voisinage de 0 la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{x}$ (prolongement par continuité, dérivabilité du prolongement en 0, équation de la tangente en 0 et position relative au voisinage de 0)

Exemple 3 *Cas où $a_1 = 0$ en un point intérieur, extremum local ?* —

Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\operatorname{ch} x}{\cos x}$ a un minimum local en 0

3 Asymptotes (obliques) en $\pm\infty$

Définition 1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose que f est définie au voisinage de $+\infty$.
La droite d'équation $y = ax + b$ est dite *asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$* si :

SF 13 : Méthode pour rechercher une asymptote

On pose $g(h) = hf\left(\frac{1}{h}\right)$: • On effectue un DL_n de g en 0 avec $n \geq 2$ • On « revient » à x en posant « $h = \frac{1}{x}$ »

Exemple 4 — Montrer que la courbe de $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x}$ possède une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de son asymptote en $+\infty$.

4 Comportement asymptotique de suites

Théorème 1 : Factorielle et suites géométriques

Pour tout $q \in \mathbb{R}$:

Exercice 1 — Démontrer ce résultat.

Théorème 2 : Formule de Stirling (admise)

Exemple 5 — Déterminer un équivalent de $\binom{2n}{n}$.

■ Développement asymptotique d'une suite implicite

Exemple 6 —

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation $e^x + x - n = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ admet une unique solution notée u_n
2. Montrer que u_n tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
3. Montrer que $u_n \sim \ln n$
4. Montrer que que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet le *développement asymptotique à deux termes* $u_n = \ln n - \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$