III Développements limités en un point (a est fini)

1 Généralités

Exemple 1 *Exemple introductif* — L'exponentielle admet en 0 les développements limités suivants :

a) $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+o(x)$ (Ordre 1) **b)** $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ (Ordre 2) **c)** $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$ (Ordre 3)

Définition 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet en a un *développement limité d'ordre n* s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

- **Interprétation heuristique:**

- **Rappel.** Si f est dérivable en $a \in D$, alors f admet le DL_1

Exemple 2 — Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer : **a)** $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$. **b)** $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$.

2 Propriétés des développements limités

Théorème 1 : Unicité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f possède en a un DL_n, alors :

Exercice 1 — Démontrer ce théorème.

- **Conséquence.** En cas d'existence, le DL_n en 0 d'une fonction paire ne comporte que des puissances paires.

Exercice 2 — Démontrer la conséquence.

Théorème 2 : Primitivation

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in D$ et f dérivable sur D. Si f' admet en a le DL_{n-1} : $f'(x) \underset{x\to a}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k (x-a)^k + o\Big((x-a)^{n-1}\Big)$

Alors f admet en a le DL_n :

Exercice 3 — Démontrer le théorème.

Exemple 3 SF 6 — Soit $n \geq 1$. Montrer : **a)** $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$ **b)** $\operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$

Théorème 3 : Formule de Taylor-Young

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $a \in D$ et que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur D. Alors f admet en a le DL_n :

Exercice 4 — Démontrer le théorème par récurrence sur n.

Exemple 4 — Calculer le développement limité en 0 de : **a)** exp à l'ordre n **b)** cos à l'ordre $2n$ **c)** tan à l'ordre 3