II Dériver une fonction de deux variables

- **Cadre.** • U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ • $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction • (a,b) est un point de U.

1 Dérivées partielles

Définition 1

Lorsqu'elles existent et sont finies, les *dérivées partielles de f* en (a,b) sont les limites finies :

- **En pratique.** L'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ équivaut à :

Attention L'existence de dérivées partielles n'entraîne pas la continuité de la fonction

SF 4 : calculer des dérivées partielles

Exemple 1 — Calculer les dérivées partielles **a)** $f : (x,y) \mapsto x^3y+e^{xy^2}+x$ **b)** $g : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Définition 2

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U si :

Exemple 2 SF 6 — Montrer que $f : (x,y) \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+y^2+1}}{e^x+y^2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 3 — Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$ Que peut-on dire de f ?

2 Problèmes d'extremums

Théorème 1 : Condition nécessaire d'extremum local

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et admet un extremum local en $p=(a,b)$, alors :

Exercice 1 — Démontrer ce théorème.

- **Vocabulaire.** On appelle *point critique* de f tout point $p=(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0.$

SF 7 : Déterminer les extremums locaux de f sur un ouvert U

Exemple 4 SF 7 — Etudier les extremums de : **a)** $f : (x,y) \mapsto x^2-3x+xy+y^2$ **b)** $f : (x,y) \mapsto x^2-y^2$

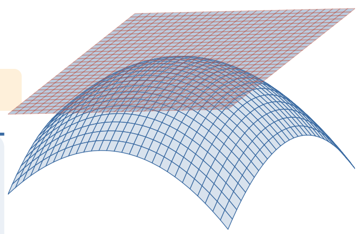
3 Développement limité à l'ordre 1

- **Cadre.** • f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U • (a,b) est un point de U.

Théorème 2 : Développement limité à l'ordre 1 (Admis)

f admet en (a,b) le développement limité à l'ordre 1 :

- **Vocabulaire.** Le plan d'équation $z-f(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$ est le *plan tangent à f en (a,b)*



Exemple 5 — Trouver une équation du plan tangent en $(0,0)$ à $f : (x,y) \mapsto \mathrm{Arctan}(x+2y)$

Définition 3

Le *gradient de f en (a,b)* est le *vecteur* :

Réécriture du développement limité