I Dérivée en un point

- **Cadre.** • I est un intervalle non vide, non réduit à un point • $a \in I$. • $f : I \to \mathbb{R}$ est définie sur I.

1 Définition

Définition 1

La fonction f est dérivable en a si son taux d'accroissement en a,

Exemple 1 — Etudier la dérivabilité en 0 de : **a)** $f : x \mapsto \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ **b)** $g : x \mapsto \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

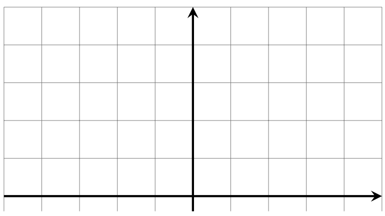
Exercice 1 — Montrer que f est dérivable en a ssi il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I,\quad f(x) = f(a)+\ell(x-a)+\varepsilon(x)(x-a)$ où $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ vérifie : $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

- **Vocabulaire et notation.** On dit que f est *dérivable à droite en a* si son taux d'accroissement en a possède une limite finie à droite en a. On note alors : $f_d'(a) = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. On définit de même la dérivée à gauche $f_g'(a)$.

Théorème 1

Supposons que a est un point intérieur à I.

f est dérivable en a ssi :



Exemple 2 — Montrer que la fonction $f : x \mapsto |\text{Arctan}\, x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Exemple 3 — On suppose que f est convexe et que a est un point intérieur à I. Montrer que f est dérivable à gauche et à droite en a.

2 Dérivabilité et continuité

- **Remarque.** Si f est dérivable en a pour $x \in I$:

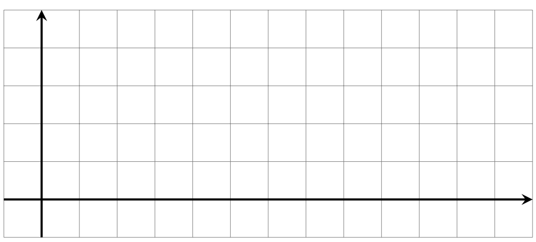
Théorème 2

Si f est dérivable en a, alors

Exercice 2 — Démontrer ce théorème.

☢ **Attention** ☢ La réciproque est fausse, par exemple :

3 Extremum local



Définition 2

- f possède un maximum local en a si :

- On définit de même la notion de minimum local.

Théorème 3

On suppose que : • a est un point intérieur à I • f est dérivable en a.

Exercice 3 ♥ — Démontrer ce théorème dans le cas d'un maximum local.

Exemple 4 ☢ ***Attention*** ☢ — Prouver que la réciproque du théorème précédent est fausse

- **Vocabulaire.** Un point a tel que f est dérivable en a et $f'(a) = 0$ est appelé un *point critique* de f.