III Polynôme dérivé

1 Généralités

Définition 1

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ avec $n \geq 1$. On définit le *polynôme dérivé* de P par :

• **Remarques:** • $P' = 0$ ssi • Si $\deg P \geq 1$, alors : $\deg P' =$

Exercice 1 — Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que : $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

SF 2 : Calculer le reste de la division euclidienne de A par B

♥ **Exemple 1** — Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 4X + 4$.

2 Polynômes dérivés d'ordres supérieurs

• **Notation.** On définit par récurrence les polynômes dérivés successifs de $P \in \mathbb{K}[X]$: • $P^{(0)} = P$ • $\forall n \in \mathbb{N},\ P^{(n+1)} = \left(P^{(n)}\right)'$

Théorème 1 : Opérations

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

• $(\lambda P + \mu Q)^{(n)} =$ • *Formule de Leibniz.* $(PQ)^{(n)} =$

Théorème 2 : Formule de Taylor polynomiale

Soient $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$: $P =$

Exercice 2 — Démontrer la formule par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

3 Multiplicité d'une racine

Définition 2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$. La *multiplicité* de a dans P est le plus grand $m \in \mathbb{N}$ tel que $(X - a)^m \mid P$. Autrement dit, a est racine de multiplicité m de P si :

• • ou encore :

Exercice 3 — Dans la définition qui précède, justifier l'existence d'un plus grand $m \in \mathbb{N}$ tel que $(X - a)^m \mid P$.

Exemple 2 *et vocabulaire* — $P = (X - 1)^2(X - 3)(X + 5)^3$ possède trois racines : 1 , 3 et -5

Théorème 3 : Généralisation des résultats du II

•Si $a_1, \ldots, a_k$ sont racines distinctes de P de multiplicités au moins $m_1, \ldots, m_k$:

•Si $\deg P = n \in \mathbb{N}$:

4 Polynômes dérivés et racines multiples

Exercice 4 — Soit $a \in \mathbb{K}$ et soit $k \in \mathbb{N}$. On pose $A = (X - a)^m$. Calculer le polynôme $A^{(k)}$. Que vaut $A^{(k)}(a)$?

Théorème 4

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Il y a équivalence entre :

i) a est racine de P de multiplicité m *ii)*

Exemple 3 — Trouver la multiplicité de 1 dans $P = X^5 - 4X^2 + 3X$.

Exercice 5 ♥ *Ex. 85.1, banque INP* — Démontrer l'équivalence du théorème ci-dessus.

• **Conséquences.**

- a est racine simple de P si et seulement si $P(a) = 0$ et $P'(a) \neq 0$.
- Si a est de multiplicité $m \geq 1$ dans P alors a est de multiplicité $m - 1$ dans P'.

Exemple 4 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $X^n - 1$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Théorème 5

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. $(X - a)^m$ divise P ssi :

Exercice 6 ♥*Ex. 85.2, banque INP* — Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P = X^5 + aX^2 + bX$ soit divisible par $(X - 1)^2$.

Exemple 5 — Montrer que $(X^2 + 1)^2$ divise $X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$.