II Familles sommables de nombres complexes (démo)

- **Cadre.** • $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de nombres complexes

Théorème 4 : Sommation par paquets (admis)

Soit $(I_k)_{k\in K}$ un recouvrement disjoint de I. La famille $\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right)_{k\in K}$ est sommable et : $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i$

démonstration du théorème.

- **Montrons d'abord que $\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right)_{k\in K}$ est sommable**

Soit $k\in K$. La famille $(u_i)_{i\in I_k}$ est sommable en tant que sous-famille de $(u_i)_{i\in I}$ et : $\left|\sum_{i\in I_k} u_i\right| \underset{\text{I.T.}}{\leq} \sum_{i\in I_k} |u_i|$.

Par croissance dans $[0,+\infty]$: $\sum_{k\in K}\left|\sum_{i\in I_k} u_i\right| \leq \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k}|u_i| \underset{\substack{\text{sommation}\\ \text{par paquets}\\ \text{dans } \mathbb{R}_+}}{=} \sum_{i\in I}|u_i| < +\infty.$

- **Montrons que : $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i$**

Dans le cas réel :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^- \underset{\substack{\text{sommation}\\ \text{par paquets}\\ \text{dans } \mathbb{R}_+}}{=} \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i^+ - \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i^- \underset{\text{linéarité}}{=} \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} u_i^+ - \sum_{i\in I_k} u_i^-\right) = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i$$

Dans le cas complexe :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I}\mathrm{Re}(u_i) + i\sum_{i\in I}\mathrm{Im}(u_i) \underset{\substack{\text{sommation}\\ \text{par paquets}\\ \text{dans } \mathbb{R}}}{=} \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k}\mathrm{Re}(u_i) + i\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k}\mathrm{Im}(u_i) \underset{\text{linéarité}}{=} \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k}\mathrm{Re}(u_i) + i\sum_{i\in I_k}\mathrm{Im}(u_i)\right) = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i$$