I Famille quelconque d'éléments de $[0,+\infty]$ (démo)

Théorème 1 : Sommation par paquets

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de $[0,+\infty]$.
Soit$(I_k)_{k\in K}$ un recouvrement disjoint de I : $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i$

démonstration du théorème. Il y a trois bornes supérieures en jeu dans la formule (toutes dans $[0,+\infty]$) :
i) $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sup_{J\in\mathscr{P}_f(I)} \sum_{i\in J} u_i$ *ii)* Pour tout $k\in\mathbb{K}$: $\displaystyle\sum_{i\in I_k} u_i = \sup_{J_k\in\mathscr{P}_f(I_k)} \sum_{i\in J_k} u_i$ *iii)* $\displaystyle\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i = \sup_{L\in\mathscr{P}_f(K)} \sum_{k\in L}\sum_{i\in I_k} u_i$

- **Montrons d'abord que :** $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i$

Par définition de la borne supérieure $i)$ en tant que plus petit des majorants, il s'agit de montrer que pour toute partie finie J de I : $\displaystyle\sum_{i\in J} u_i \leq \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i$.
Soit $J\in\mathscr{P}_f(I)$. On pose : $L=\{k\in K \mid I_k\cap J\neq\varnothing\}$. L'ensemble L est fini car J est fini donc en séparant les sommes (finies) : $\displaystyle\sum_{i\in J} u_i = \sum_{k\in L}\sum_{i\in I_k\cap J} u_i \underset{ii)}{\leq} \sum_{k\in L}\sum_{i\in I_k} u_i \underset{iii)}{\leq} \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i$

- **Montrons que :** $\displaystyle\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i$

Par définition de la borne supérieure $iii)$ en tant que plus petit des majorants, il s'agit de montrer que pour toute partie finie L de K : $\displaystyle\sum_{k\in L}\sum_{i\in I_k} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i$.
Soit $L\in\mathscr{P}_f(K)$. Pour toutes parties finies J_k de I_k, k décrivant L, la réunion disjointe $\displaystyle\bigcup_{k\in L} J_k$ est une partie finie de I donc : $\displaystyle\sum_{k\in L}\sum_{i\in J_k} u_i = \sum_{i\in\bigcup_{k\in L} J_k} u_i \underset{i)}{\leq} \sum_{i\in I} u_i$. Ainsi[1] : $\displaystyle\sum_{k\in L}\sum_{i\in I_k} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i$ et par $iii)$: $\displaystyle\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i$.

1. Ceci repose sur $ii)$. Précisément, si $u_i=+\infty$ pour un $i\in\bigcup_{k\in L} J_k$ alors $\displaystyle\sum_{k\in L}\sum_{i\in I_k} u_i = +\infty = \sum_{i\in I} u_i$. Dans le cas contraire, par caractérisation séquentielle de la borne supérieure dans $[0,+\infty]$, pour chaque $k\in L$, il existe une suite $(J_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de I_k pour laquelle : $\displaystyle\sum_{i\in J_k^n} u_i \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{i\in I_k} u_i$. Avec ce qui précède, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k\in L}\sum_{i\in J_k^n} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i$. Par passage à la limite $\displaystyle\sum_{k\in L}\sum_{i\in I_k} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i$