4 Demi-limites

- **Cadre.** a est un point intérieur à I *i.e.* pas une borne de I, f est donc définie à gauche et à droite de a.

Définition 5

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. f admet ℓ pour limite à droite si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in \mathcal{D}_f \cap \underbrace{]a, a+\alpha]}_{\text{on approche } a \text{ par la droite}},\quad |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$$

f admet ℓ pour limite à gauche si :

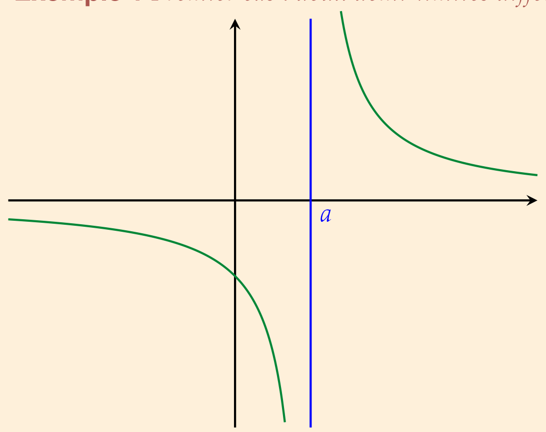
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in \mathcal{D}_f \cap \underbrace{[a-\alpha, a[}_{\text{on approche } a \text{ par la gauche}},\quad |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$$

- **Remarques:**
  - Ici encore, il y a unicité de la limite
  - On note par exemple pour la limite à droite : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a^+} f = \ell$
  - On définit également de même les notions de demi-limites infinies à droite ou à gauche en $a \in \mathbb{R}$

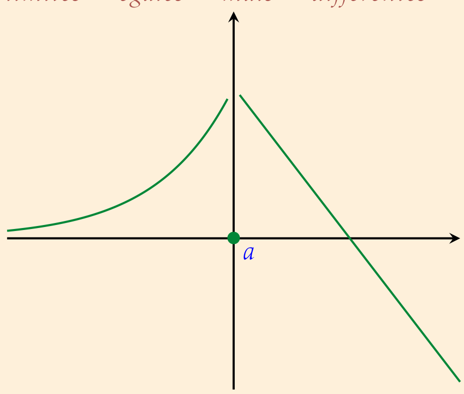
Attention

- Dans la définition, a est exclu (l'intervalle est ouvert en a). Ainsi lorsque f est définie en a, f peut admettre en a des demi-limites autres que $f(a)$ comme illustré sur l'exemple 2 (ce n'est pas le cas de la limite au sens général, voir la remarque en bas de page).
- f peut admettre des demi-limites sans avoir de limite : sur les cas de figures illustrés ci-dessous f n'a pas de limite en a mais elle y admet une limite à gauche et une limite à droite.

Exemple 1 *Premier cas : deux demi-limites différentes* —



Exemple 2 *Deuxième cas : deux demi-limites égales mais différentes de $f(a)$* —



De façon générale, on dispose du résultat suivant :

Théorème 2 : Limite ⇝ Limites à droite et à gauche

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

i) Si $a \in \mathcal{D}_f$: $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si : $\lim\limits_{a^+} f = \lim\limits_{a^-} f = \ell$ et $\boxed{\ell = f(a)}$

ii) Si $a \notin \mathcal{D}_f$: $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si : $\lim\limits_{a^+} f = \lim\limits_{a^-} f = \ell$

Démonstration. Montrons par exemple l'implication réciproque dans le cas *i)* *i.e.* supposons que $\lim\limits_{a^+} f = \lim\limits_{a^-} f$ et $\ell = f(a)$.
Montrons que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$. On traite le cas où ℓ est finie. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèses :

- il existe $\alpha_1 > 0$ tel que : $\forall x \in \mathcal{D}_f \cap]a, a+\alpha_1]$, $|f(x)-\ell| \leq \varepsilon$
- il existe $\alpha_2 > 0$tel que : $\forall x \in \mathcal{D}_f \cap [a-\alpha_2, a[$, $|f(x)-\ell| \leq \varepsilon$

Posant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$, pour tout $x \in \mathcal{D}_f \cap [a-\alpha, a+\alpha] \setminus \{a\}$: $|f(x)-\ell| \leq \varepsilon$.
C'est encore vrai pour $x = a$ car alors : $|f(x)-\ell| \underset{x=a}{=} |f(a)-\ell| \underset{\ell=f(a)}{=} 0 \leq \varepsilon$.

Par conséquent : $\forall x \in \mathcal{D}_f \cap [a-\alpha, a+\alpha]$, $|f(x)-\ell| \leq \varepsilon$ □

- **Remarque.** Si $a \in \mathcal{D}_f$ *i.e.* si f est définie en a, alors la seule limite possible (au sens général) pour f est $f(a)$.

En effet supposons que : $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in \mathcal{D}_f \cap [a-\alpha, a+\alpha]$: $|f(x)-\ell| \leq \varepsilon$.
Puisque $a \in \mathcal{D}_f \cap [a-\alpha, a+\alpha]$: $|f(a)-\ell| \leq \varepsilon$, et ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$.

Supposons par l'absurde que $f(a) \neq \ell$. En prenant $\varepsilon = \dfrac{|f(a)-\ell|}{2} > 0$ dans l'inégalité précédente on obtient $|f(a)-\ell| \leq \dfrac{|f(a)-\ell|}{2}$ ce qui est impossible.