I Injections, surjections, bijections

- **Cadre.** E et F sont des ensembles.

1 Les définitions

Définition 1

Une application f de E dans F associe à tout élément $x \in E$ un unique élément de F, appelé son image et noté $f(x)$.

- Pour $y \in F$, un *antécédent* de y par f est :
- E est appelé :
- F est appelé :
- Un élément $x \in E$ a :
- Un élément $y \in F$ peut avoir :

- **Notation.** L'ensemble des applications de E dans F est noté :

Exemple 1 — Trouver les antécédents des complexes i, 0 et $3+4i$ par **a)** $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{ix} \end{array}$ **b)** $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array}$

Définition 2

Une application $f : E \to F$ est dite :

- *Injective* si :
- *Surjective* si :
- *Bijective* si :

Ni injective, ni surjective	*Injective, non surjective*	*Surjective, non injective*	*Bijective*

SF 3 et SF 6 : montrer que f n'est pas injective ou pas surjective

Exemple 2 — Les applications suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ? **a)** $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$ **b)** $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}$

2 Prouver l'injectivité en pratique

Pour montrer que f est injective

- f est injective ssi pour tous $x, x' \in E$:
- **Rédaction type.** « Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$ ... ... donc $x = x'$. »

Exemple 3 SF 2 — Montrer que l'application $f : z \mapsto \dfrac{z+i}{z-i}$ est injective sur $\mathbb{C} \setminus \{i\}$.

Théorème 1 : Cas des fonctions réelles

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$.

Exercice 1 — Démontrer ce théorème dans le cas où f est strictement croissante.

3 Prouver la surjectivité en pratique

Pour montrer que f est surjective

On fixe $y \in F$, puis on construit $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Exemple 4 SF 5 — Montrer que $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}$ est surjective.