I Définition des déterminants

1 Déterminant de n vecteurs dans une base

•**Cadre.** • E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n • $\mathscr{B}$ une base de E • $\mathscr{F} = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E

Théorème 1

On appelle *déterminant de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$* le scalaire : $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) \underset{\text{déf.}}{=}$

où $a_{i,j}$ est la i-ième coordonnée de x_j dans la base $\mathscr{B}$.

1. L'application $\det_{\mathscr{B}}$ est une forme n-linéaire alternée.
2. Toute autre forme n-linéaire alternée sur E est un multiple de $\det_{\mathscr{B}}$.
3. $\det_{\mathscr{B}}$ est l'unique forme n-linéaire alternée vérifiant $\det_{\mathscr{B}}(b_1, \ldots, b_n) = 1$.

Exercice 1 *Cas $n = 2$* — **a)** Donner l'expression de $\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2)$ **b)** Calculer : $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$

• **Interprétation dans $\mathbb{R}^2$.** $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ représente l'aire orientée du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Exercice 2 *Cas $n = 3$* — **a)** Donner l'expression de $\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, x_3)$ **b)** Calculer : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

Théorème 2 : Propriétés des déterminants

- Si $\mathscr{B}'$ est une autre base de E :
- $\mathscr{F}$ est une base de E ssi :

Exercice 3 — Démontrer le théorème.

SF 8 : Pour montrer qu'une famille de n vecteurs est une base

Il suffit de vérifier que son déterminant dans une base de E n'est pas nul.

Exemple 1 — **1.** On pose $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (1,2,3)$ et $u_3 = (1,1,2)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Les polynômes : $P_1 = X^2$, $P_2 = a(X-1)^2$ et $P_3 = a^2X^2 + aX + 1$ forment-ils une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

2 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le *déterminant de A* est défini comme le déterminant de la famille des colonnes de A dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

$\det(A) \underset{\text{déf.}}{=}$ Cette quantité est notée

Exemple 2 *Déterminant de l'identité* — Démontrer que : **a)** $\det(I_n) = 1$. **b)** Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda I_n) = \lambda^n$

Théorème 3

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. 1. 2.

3. $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ssi

Attention Le déterminant n'est pas linéaire, en particulier : $\det(A+B) \cancel{=} \det(A) + \det(B)$.

Exercice 4 — Démontrer le théorème.

• **Conséquence du point 3 à retenir.** $\det(A) = 0$ ssi les colonnes de A sont liées

Ainsi $\det(A) = 0$ si : • Une colonne est nulle • Deux colonnes sont identiques • Deux colonnes sont colinéaires

Théorème 4 : Transposée

Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

Exercice 5 — Démontrer le théorème en utilisant la définition du déterminant.

Exercice 6 — Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme : $A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline * & \cdots & * & a_{n,n} \end{array}\right)$. Montrer que : $\det(A) = a_{n,n} \det(A')$.

Théorème 5 : Matrices triangulaires

Si $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire :