II Loi d'un couple de variables aléatoires

- **Cadre.** • (Ω, P) est un espace probabilisé fini • X, Y sont des variables aléatoires sur Ω.

1 Loi conjointe, marginales

- **Cadre.** On s'intéresse à la variable aléatoire $\omega \mapsto \big(X(\omega), Y(\omega)\big)$, notée (X, Y).
- **Vocabulaire.** • La loi du couple (X, Y) est appelée *loi conjointe de X et Y*.
  • Les lois de X et de Y sont appelées *les lois marginales du couple* (X, Y).

SF 6 : déterminer la loi conjointe de X et Y revient à

i) *ii)*

Exemple 1 — On tire simultanément 2 boules dans une urne contenant 3 boules jaunes, une noire et 6 rouges. Déterminer la loi de (X, Y) où X est le nombre de boules jaunes et Y le nombre de boules noires obtenues.

Théorème 1 : La loi conjointe donne les lois marginales

• Pour tout $i \in X(\Omega)$:

• Pour tout $j \in Y(\Omega)$:

Exercice 1 — Démontrer la formule pour le premier point.

- **Remarques:**
  1. On a toujours : $\displaystyle\sum_{i \in X(\Omega)} \sum_{j \in Y(\Omega)} P(X = i\,,\, Y = j) = 1$
  2. Les lois des marginales X et Y ne permettent pas de retrouver la loi conjointe (voir le tableau)

2 Loi conditionnelle

- **Vocabulaire.** On fixe $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(A) \neq 0$.
- La *loi conditionnelle de Y* sachant A est la probabilité $B \mapsto P_A(Y \in B)$ de $\mathscr{P}\big(Y(\Omega)\big)$ dans $[0, 1]$.
- Elle est entièrement déterminée par la *distribution de probabilités* : $\big(P_A(Y = j)\big)_{j \in Y(\Omega)}$

Utiliser la loi conditionnelle pour trouver la loi :

Dans les exercices, en général on *connaît* les $P_{\{X=i\}}(Y = j)$ et on *cherche* la distribution de Y *i.e.* les $P(Y = j)$.

On applique la formule des probabilités totales avec le s.c.e $\{X = i\}_{i \in I}$:
$$P(Y = j) = \sum_{i \in X(\Omega)} P_{\{X=i\}}(Y = j) P(X = i)$$

Exemple 2 *SF 4* — On dispose de n urnes $U_1, \dots, U_n$. Pour $1 \leq k \leq n$, l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule au hasard dans l'urne choisie. On note X est le numéro de l'urne choisie et Y le numéro de la boule choisie.
a) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = i\}$. **b)** En déduire la loi de Y puis son espérance.

Exemple 3 *SF 4* *cf. Ex. 98, banque INP* — Une lionne affamée attaque chaque membre d'un troupeau de n gazelles. Les attaques sont indépendantes et chaque gazelle est attrapée avec probabilité $p \in]0, 1[$.
1. Donner (sans calcul) la loi du nombre X de gazelles attrapées par la lionne.
Loin d'être rassasiée, la lionne attaque une seconde fois, dans les mêmes conditions, les $n - X$ gazelles qu'elle n'a pu attraper au cours de la première série d'attaques. On note Y le nombre de gazelles attrapées cette fois.
2. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Donner (sans calcul) la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = i\}$.
3. On pose $Z = X + Y$. Montrer que Z suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, 2p - p^2)$.

3 Espérance d'un produit

- **Cadre.** X, Y sont à valeurs réelles (ou complexes). Dans ce cas la formule de transfert s'écrit :

$E(f(X, Y)) =$

Théorème 2 : Espérance de XY

Exercice 2 — Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.