II Convexité : rappels de terminale

- **Cadre.** • I est un intervalle • $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur I

1 Définition et position par rapport aux cordes

Définition 1

La fonction f est convexe si pour tous $a, b \in I$:

- **Géométriquement.** $\mathscr{C}_f$ est en dessous de toutes ses cordes.

Exemple 1 SF 8 SF 2 — Etablir : $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\quad e^{a+b} \leq \frac{e^{2a}+e^{2b}}{2}$.

- **Remarque.** La fonction f est concave si :

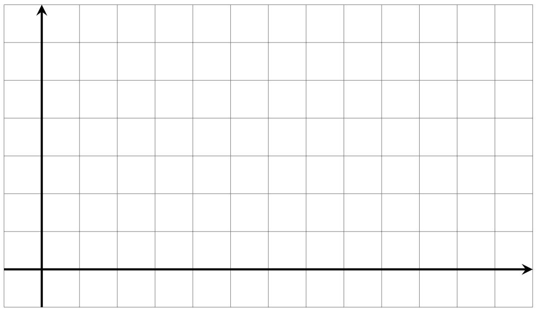
2 Caractérisations de la convexité

Théorème 1

Il y a équivalence entre :

i) f est convexe sur I

ii)



Exercice 1 ♥ — Démontrer cette équivalence.

Exemple 2 SF 9 — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, convexe et majorée.
Montrer que f est constante.

Théorème 2 : Justifier la convexité

- On suppose f dérivable sur I. $\quad f$ est convexe ssi :
- On suppose f deux fois dérivable sur I. $\quad f$ est convexe ssi :

3 Inégalités de convexité

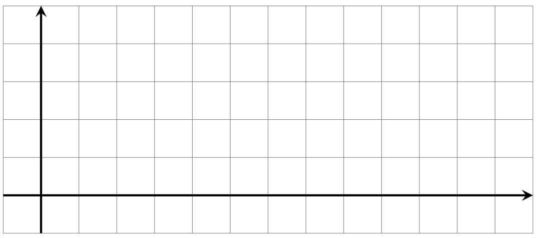
- **Inégalité des cordes.**

On suppose f convexe sur I. Soit $a, b \in I$, distincts. Pour tout x entre a et b :

Théorème 3

On suppose f dérivable sur I.Si f est convexe sur I, alors le graphe de f est situé au-dessus de toutes ses tangentes.

Pour tous $a, x \in I$:



Théorème 4 : Inégalité de Jensen

On suppose f convexe sur I. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tous $a_1, \ldots, a_n \in I$ et tous $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$:

Exercice 2 ♥ — Démontrer le théorème par récurrence sur n.

- **Cas particulier important.** Avec $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = \frac{1}{n}$ l'inégalité s'écrit :

Exemple 3 SF 2 ♥ *Inégalité arithmético-géométrique* — Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Etablir : $\quad (x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$