II Continuité en un point

1 Définition de la continuité

- **Cadre.** • $a \in \mathscr{D}_f$ *i.e.* f est définie en a.

Définition 1

- f est *continue* en a si :
- f est continue à gauche (respectivement à droite) si :

Exemple 1 SF 4 — Etudier la continuité de f en 0. **a)** $f : x \mapsto \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ **b)** $f : x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Théorème 1

On suppose que a est un point intérieur à I.

f est continue en a ssi :

Exemple 2 SF 4 — Soit $n \in \mathbb{Z}$. Etudier la continuité à gauche et à droite en n de la fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

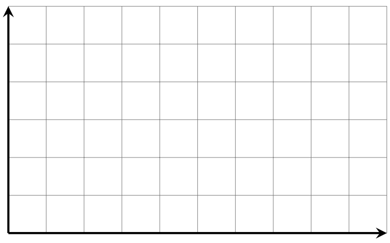
2 Prolongement par continuité

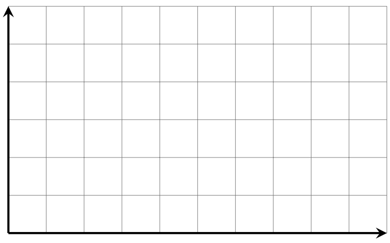
- **Cadre.** • $\mathscr{D}_f = I \setminus \{a\}$ *i.e.* f n'est pas définie en a.

Définition 2

f est *prolongeable par continuité* en a

si :





- **Vocabulaire.** On note $\widetilde{f}$ la fonction définie sur I par : $\forall x \in I,$
  - Par construction la fonction $\widetilde{f}$ est :
  - $\widetilde{f}$ est appelée le *prolongement par continuité de f en a.*

SF 5 : Montrer que f est prolongeable par continuité en a

Exemple 3 — Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 : **a)** $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ **b)** $f : x \mapsto x \ln x$.

3 Caractérisation séquentielle de la continuité (continuité et suites)

Théorème 2 : Intervertion de limite : « $f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$ »

Soit $a \in \mathscr{D}_f$. Il y a équivalence entre :

i) f est continue en a

ii)

- **Conséquence.** Cela justifie le critère « $\ell = f(\ell)$ » pour les suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est continue.

Pour une telle suite | si : • $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$ • f est continue en ℓ alors : $\ell = f(\ell)$. |

Exercice 1 ♥ — **1.** Démontrer l'équivalence entre *i)* de *ii)* dans le théorème 2

2. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $f(r) = g(r)$. Montrer que $f = g$.

SF 8 : Equations fonctionnelles et continuité en un point

♥ **Exemple 4** *Ex. 43, banque INP* — **1.** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite u par $u_0 = x_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{Arctan} u_n$. Montrer que u converge et trouver sa limite.

2. Trouver toutes les fonctions $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue en 0, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = h(\operatorname{Arctan} x)$.

Exemple 5 ♥ — Montrer que les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$ sont exactement les fonctions de la forme $x \mapsto ax$ pour $a \in \mathbb{R}$.