I Fonction continue à deux variables

1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$

- **Cadre.** • $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne *i.e.* pour tout $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $\quad \|u\|=\sqrt{x^2+y^2}$

Ouverts de $\mathbb{R}^2$

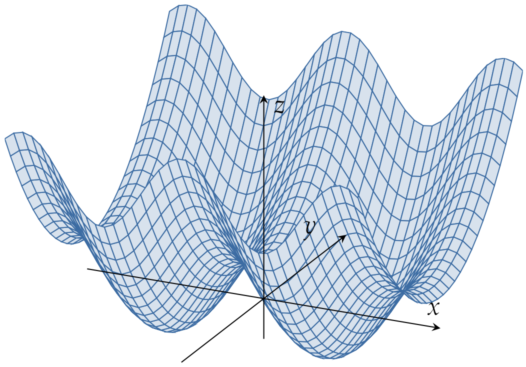
- *Boule*. Soit $p\in\mathbb{R}^2$ et $r>0$. La *boule ouverte de centre p et de rayon r* est : $\quad B(p,r)=\left\{u\in\mathbb{R}^2 \mid \|u-p\|<r\right\}$.
- *Ouvert*. Une partie U de $\mathbb{R}^2$ est un *ouvert* si pour tout $p\in U$, il existe $r>0$ tel que : $\quad B(p,r)\subset U$.

Exemple 1 *Exemples d'ouverts de $\mathbb{R}^2$* — Les ensembles suivants sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$:

a) $\mathbb{R}^2$ **b)** $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ **c)** $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ **d)** $]0,1[\times]0,1[$ **e)** $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,\quad y>0 \quad \text{et} \quad x+y<1\right\}$

2 Continuité d'une fonction de deux variables

- **Cadre.** • U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ • $f:U\to\mathbb{R}$ est une fonction



Définition 1

Soit $p\in U$. La fonction f est *continue en p* si :

On dit que f est *continue sur U* lorsqu'elle est continue en tout point de U.

- **Remarque.** Posant $\ell=f(p)$ la continuité de f en p s'écrit :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\alpha>0 \mid \forall u\in B(p,\alpha),\quad |f(u)-\ell|\leq\varepsilon$$

On dit dans ce cas que f *admet ℓ pour limite en p* et on note : $\quad f(u)\underset{u\to p}{\longrightarrow}\ell$.

Exemple 2 — Montrer que $f:(x,y)\mapsto x$ et $g:(x,y)\mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

SF 1 : Justifier la continuité d'une fonction sur un ouvert U

Que ce soit en un point ou sur un ouvert, les fonctions suivantes sont continues :

- La somme, le produit et le quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions continues
- Les fonctions polynomiales *i.e.* les combinaisons linéaires de fonctions de la forme $(x,y)\mapsto x^k y^\ell$
- La composée de fonctions continues : étant données des fonction réelles φ,u,v **continues** sur un intervalle I :
  - La fonction $(x,y)\mapsto\varphi\big(f(x,y)\big)$ est continue sur U si f est à valeurs dans I.
  - La fonction $t\mapsto f\big(u(t),v(t)\big)$ est continue sur I si $t\mapsto\big(u(t),v(t)\big)$ est à valeurs dans U

Exemple 3 SF 1 — Justifier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de $f:(x,y)\mapsto\dfrac{\ln(x^2+y^2+1)}{e^x+y^2}$

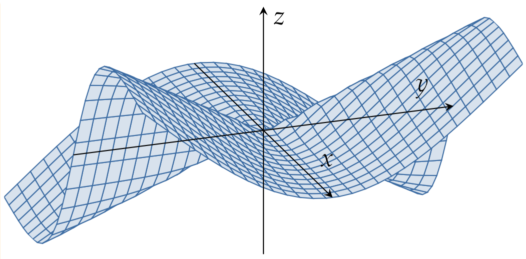
SF 2 : continuité en un point p à problème

On peut chercher une majoration de la forme : $\quad |f(u)-f(p)|\leq\varepsilon(r)$

où : $\quad$ • $r=\|u-p\|$ • $\varepsilon(r)\underset{r\to 0}{\longrightarrow}0$

Exemple 4 — Montrer que $f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.



SF 3 : montrer que f n'est pas continue en un point

On peut chercher deux fonctions u et v telles que :

• $u(t)\underset{t\to 0}{\longrightarrow}a \quad$ et $\quad v(t)\underset{t\to 0}{\longrightarrow}b$ • $t\mapsto f\big(u(t),v(t)\big)$ n'est pas continue en 0.

Exemple 5 — Montrer que $f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

n'est pas continue en $(0,0)$.