- **Cadre.** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Construction du corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles

- **Notation.** On note E l'ensemble des couples (A,B) de polynômes tels que $B \neq 0$ *i.e.* : $E = \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.
- **Objectif.** Associer à tout couple $(A,B) \in E$ un « objet fraction » qui sera noté $\dfrac{A}{B}$.

Exercice 1 — On définit sur E une relation binaire $\sim$ en posant, pour tous $(A,B),(C,D) \in E$:
$(A,B) \sim (C,D) \iff AD = BC$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.

Définition 1

On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des classes d'équivalences de E pour la relation $\sim$.

- **Notation.** Pour tout $(A,B) \in E$ on note $\dfrac{A}{B}$ la classe d'équivalence de (A,B) : $\dfrac{A}{B} \underset{\text{déf.}}{=} \left\{(C,D) \in E \mid AD = BC\right\}$
- **Remarques:**
  - Par construction : $\boxed{\mathbb{K}(X) = \left\{\dfrac{A}{B}\,;\,(A,B) \in E\right\}}$ et pour tous $(A,B),(C,D) \in E$: $\boxed{\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D} \Leftrightarrow AD = BC}$
  - Afin de définir l'addition et la multiplication de deux fractions $F = \dfrac{A}{B}$ et $G = \dfrac{C}{D}$ par les formules naturelles (voir la définition 2 ci-dessous), il convient de vérifier que ces formules ne dépendent pas des couples (A,B) et (C,D) choisis mais seulement de F et G. C'est l'objet de l'exercice qui suit.

Exercice 2 — Soient $(A_1,B_1),(A_2,B_2),(C_1,D_1),(C_2,D_2) \in E$ tels que : $\dfrac{A_1}{B_1} = \dfrac{A_2}{B_2}$ et $\dfrac{C_1}{D_1} = \dfrac{C_2}{D_2}$.

Montrer que : $\dfrac{A_1D_1 + B_1C_1}{B_1D_1} = \dfrac{A_2D_2 + B_2C_2}{B_2D_2}$ et $\dfrac{A_1C_1}{B_1D_1} = \dfrac{A_2C_2}{B_2D_2}$

Le résultat de l'exercice qui précède permet de définir deux lois de composition internes sur $\mathbb{K}(X)$:

Définition 2

Pour tous $(A,B),(C,D) \in E$ on pose : $\dfrac{A}{B} + \dfrac{C}{D} \underset{\text{déf.}}{=} \dfrac{AD+BC}{BD}$ et $\dfrac{A}{B} \times \dfrac{C}{D} \underset{\text{déf.}}{=} \dfrac{AC}{BD}$.

Théorème 1

$\big(\mathbb{K}(X),+,\times\big)$ est un corps.

Exercice 3 — Démontrer le théorème.

Exercice 4 — Montrer que $\varphi : P \mapsto \dfrac{P}{1}$ est un morphisme injectif d'anneaux de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$.

- **Remarque.** L'injection précédente permet de « plonger » l'anneau $\mathbb{K}[X]$ dans le corps $\mathbb{K}(X)$. Précisément on identifie $\mathbb{K}[X]$ avec son image par φ en décidant de confondre tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ avec la fraction $\dfrac{P}{1} \in \mathbb{K}(X)$. Cette identification fait de $\mathbb{K}[X]$ un sous-anneau de $\mathbb{K}(X)$.

2 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

- **Cadre.** • $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ avec $P \wedge Q = 1$ • E est sa partie entière • $a_1,\ldots,a_k$ ses pôles de multiplicités $m_1,\ldots,m_k$
- **Objectif.** Donner une preuve d'existence pour le théorème suivant :

Théorème 2

Il existe une unique famille $(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le m_i}}$ de complexes telle que : $F = E + \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(X-a_i)^j}$

Exercice 5 —

1. On rappelle que : $Q = \lambda\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X-a_i)^{m_i}$. Montrer qu'il existe $U_1,\ldots U_k \in \mathbb{C}[X]$ tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{QU_i}{(X-a_i)^{m_i}} = 1$.
2. Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, on note R_i le reste de la division euclidienne de PU_i par $(X-a_i)^{m_i}$.

   Montrer que : $F = E + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{R_i}{(X-a_i)^{m_i}}$.
3. Démontrer l'existence de la famille $(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le m_i}}$ du théorème.

Solution de l'exercice 1 — Soient $(A,B),(C,D),(F,G) \in E$.

- *Réflexivité.* $AB = AB$ donc : $(A,B) \sim (A,B)$.
- *Symétrie.*
  Supposons : $(A,B) \sim (C,D)$ *i.e.* $AD = BC$
  Alors : $CB = DA$ donc : $(C,D) \sim (A,B)$.
- *Transitivité.*
  Supposons : $(A,B) \sim (C,D)$ et $(C,D) \sim (F,G)$
  c'est à dire : $AD = BC$ et $CG = DF$
  Notons que : $ADG = BCG = BDF$
  Vu que $D \neq 0$ et que $\mathbb{K}[X]$ est intègre :
  $$AG = BF \quad i.e. \quad (A,B) \sim (F,G)$$

Solution de l'exercice 2 —
Par hypothèses : $A_1B_2 = A_2B_1$ et $C_1D_2 = C_2D_1$.
Donc :
$$\begin{aligned}(A_1D_1 + B_1C_1)B_2D_2 &= A_1B_2 \times D_1D_2 + C_1D_2 \times B_1B_2 \\ &= A_2B_1 \times D_1D_2 + C_2D_1 \times B_1B_2 \\ &= B_1D_1(A_2D_2 + B_2C_2)\end{aligned}$$
et :
$$A_1C_1 \times B_2D_2 = A_1B_2 \times C_1D_2 = A_2B_1 \times C_2D_1 = B_1D_1 \times A_2C_2$$

Solution de l'exercice 3 — Montrons que $\left(\mathbb{K}(X),+,\times\right)$ est un corps.
Soient (A,B), (C,D), $(F,G) \in E$.

- *Montrons que $\left(\mathbb{K}(X),+\right)$ est un groupe commutatif.*
  - *Commutativité de +.*
    $$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+BC}{BD} = \frac{CB+DA}{DB} = \frac{C}{D} + \frac{A}{B}$$
  - *Associativité de +.*
    $$\begin{aligned}\left(\frac{A}{B} + \frac{C}{D}\right) + \frac{F}{G} &= \frac{AD+BC}{BD} + \frac{F}{G} \\ &= \frac{(AD+BC)G + (BD)F}{BD \times G} \\ &= \frac{A(DG) + B(CG+DF)}{B \times DG} \\ &= \frac{A}{B} + \frac{CG+DF}{DG} = \frac{A}{B} + \left(\frac{C}{D} + \frac{F}{G}\right)\end{aligned}$$
  - *Existence d'un élément neutre pour +.*
    $$\frac{A}{B} + \frac{0}{1} = \frac{A \times 1 + B \times 0}{B \times 1} = \frac{A}{B}$$
    et : $\dfrac{0}{1} + \dfrac{A}{B} = \dfrac{0 \times B + 1 \times A}{1 \times B} = \dfrac{A}{B}$
    donc $\dfrac{0}{1}$ est neutre pour +.
  - *Existence d'un « inverse » pour +.*
    $$\frac{A}{B} + \frac{-A}{B} = \frac{AB + B \times (-A)}{B^2} = \frac{0}{B^2} = \frac{0}{1}$$
    et de même $\dfrac{-A}{B} + \dfrac{A}{B} = \dfrac{0}{1}$.
- *Propriétés de $\times$.* On vérifie de même que $\times$ est associative, possède $\dfrac{1}{1}$ pour élément neutre et est distributive sur + : $\left(\mathbb{K}(X),+,\times\right)$ est un anneau.

  On vérifie enfin que $\times$ est commutative et que si $\dfrac{A}{B}$ est non nulle alors $\dfrac{B}{A}$ est un inverse de $\dfrac{A}{B}$ pour $\times$ ce qui prouve que $\left(\mathbb{K}(X),+,\times\right)$ est un corps.

Solution de l'exercice 4 —

- *φ est un morphisme d'anneaux.* Soient $P,Q \in \mathbb{K}[X]$.
  - Par construction $\varphi(1) = \dfrac{1}{1}$.
  - $\varphi(P+Q) = \dfrac{P+Q}{1} = \dfrac{P}{1} + \dfrac{Q}{1} = \varphi(P) + \varphi(Q)$
  - $\varphi(P \times Q) = \dfrac{P \times Q}{1} = \dfrac{P}{1} \times \dfrac{Q}{1} = \varphi(P) \times \varphi(Q)$
- *φ est injective.* Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
  Supposons que : $\varphi(P) = \dfrac{0}{1}$ *i.e.* $\dfrac{P}{1} = \dfrac{0}{1}$.
  Ainsi : $P \times 1 = 1 \times 0$ *i.e.* $P = 0$.

Solution de l'exercice 5 —

1. Les polynômes :

- $P_1 = \dfrac{Q}{(X-a_1)^{m_1}} = (X-a_2)^{m_2} \times \cdots \times (X-a_k)^{m_k}$
- $P_2 = \dfrac{Q}{(X-a_2)^{m_1}} = (X-a_1)^{m_2}(X-a_3)^{m_3} \ldots (X-a_k)^{m_k}$

...

- $P_k = \dfrac{Q}{(X-a_k)^{m_k}} = (X-a_1)^{m_1} \times \cdots \times (X-a_{k-1})^{m_{k-1}}$

sont premiers entre eux dans leur ensemble (ils sont décomposés en facteurs irréductibles) donc une relation de Bézout entre $P_1, \ldots, P_k$ s'écrit :
$$1 = \sum_{i=1}^{k} P_i U_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{QU_i}{(X-a_i)^{m_i}}$$
pour certains $U_1, \ldots, U_k \in \mathbb{C}[X]$.

2. En multipliant l'égalité de **1.** par $F = \dfrac{P}{Q}$:
$$F = \sum_{i=1}^{k} \frac{PU_i}{(X-a_i)^{m_i}}$$
Or par définition des R_i, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, il existe $Q_i \in \mathbb{C}[X]$ tel que : $PU_i = Q_i(X-a_i)^{m_i} + R_i$

donc : $$F = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} Q_i}_{\text{polynôme}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \frac{R_i}{(X-a_i)^{m_i}}}_{\substack{\text{de degré} \\ \text{strictement négatif}}}$$

L'unicité de la décomposition de F comme somme d'un polynôme et d'une fraction de degré strictement négatif assure que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} Q_i = E$

3. D'après **2.** : $F = E + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{R_i}{(X-a_i)^{m_i}}$.

Soit $i \in [\![1,k]\!]$. Par construction $R_i \in \mathbb{C}_{m_i-1}[X]$ donc d'après la formule de Taylor pour les polynômes : $R_i = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{m_i-1} \frac{R_i^{(\ell)}(a_i)}{\ell!}(X-a_i)^{\ell}$

Ainsi :
$$\begin{aligned}\frac{R_i}{(X-a_i)^{m_i}} &= \sum_{\ell=0}^{m_i-1} \frac{R_i^{(\ell)}(a_i)}{\ell!} \frac{1}{(X-a_i)^{m_i-\ell}} \\ &\underset{j=m_i-\ell}{=} \sum_{j=1}^{m_i} \underbrace{\frac{R_i^{(m_i-j)}(a_i)}{(m_i-j)!}}_{=a_{i,j} \in \mathbb{C}} \frac{1}{(X-a_i)^j} = \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(X-a_i)^j}\end{aligned}$$

et donc : $$F = E + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(X-a_i)^j}$$