

- **Cadre.**  $X$  est une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$ .

## 1 Inégalités de Markov

### Théorème 1 : Inégalité de Markov

Si  $X$  est positive alors, pour tout  $a > 0$  :



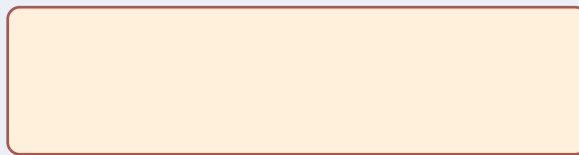
**Exercice 1** ♥ — Démontrer l'inégalité de Markov

**Exemple 1** SF 12 — Soit  $X$  une variable aléatoire de loi  $\mathcal{B}(n, p)$ . En appliquant l'inégalité de Markov, à une variable judicieusement choisie, montrer :  $\forall t, \varepsilon > 0, \quad P(X - np \geq n\varepsilon) \leq e^{-nt\varepsilon} E(e^{t(X-np)})$

## 2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

### Théorème 2 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Pour tout  $a > 0$  :



**Exercice 2** ♥ — Démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev en appliquant l'inégalité de Markov à une variable aléatoire  $Z$  bien choisie

**Exemple 2** SF 13 — Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires réelles définies sur  $\Omega$ , **indépendantes et de même loi**. On note  $m$  leur espérance  $m$  et  $\sigma$  leur écart-type et on pose :  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .

A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, établir :  $\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$ .

## 3 Une application classique : théorème d'approximation polynomiale de Weirstrass

- **Cadre.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue.
- **Objectif.** Prouver qu'il existe une suite  $(p_n)$  de fonctions polynomiales sur  $[0, 1]$  telle que :  $\|f - p_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- **Les polynômes de Bernstein.** On pose pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in [0, 1]$  :  $p_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ .

**Exemple 3** *Convergence uniforme de la suite des polynômes de Bernstein* SF 13 —

1. Soit  $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0, 1]$  fixés. On se donne une variable aléatoire  $S_n$  de loi binomiale  $\mathcal{B}(n, x)$ .

a) Montrer que :  $|p_n(x) - f(x)| \leq E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right)$ .

b) Justifier l'existence de  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  tel que :  $\forall x, y \in [0, 1], \quad |x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ .

c) Pose :  $A = \left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| < \alpha\right\}$ . Montrer que :  $E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbf{1}_A\right) \leq \varepsilon$ .

d) En déduire que :  $|p_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$ .

2. Montrer que la suite  $(p_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$  i.e. :  $\|f - p_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$