III Compléments : inégalités probabilistes

- **Cadre.** X est une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

1 Inégalités de Markov

Théorème 1 : Inégalité de Markov

Si X est $\boxed{\text{positive}}$ alors, pour tout $a > 0$:

Exercice 1 ♥ — Démontrer l'inégalité de Markov

Exemple 1 SF 12 — Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(n,p)$. En appliquant l'inégalité de Markov, à une variable judicieusement choisie, montrer : $\forall t, \varepsilon > 0, \quad P(X - np \geq n\varepsilon) \leq e^{-nt\varepsilon} E\left(e^{t(X-np)}\right)$

2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 2 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Pour tout $a > 0$:

Exercice 2 ♥ — Démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev en appliquant l'inégalité de Markov à une variable aléatoire Z bien choisie

Exemple 2 SF 13 — Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles définies sur Ω, **indépendantes et de même loi**. On note m leur espérance m et σ leur écart-type et on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, établir : $\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$.

3 Une application classique : théorème d'approximation polynomiale de Weirstrass

- **Cadre.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.
- **Objectif.** Prouver qu'il existe une suite (p_n) de fonctions polynomiales sur $[0,1]$ telle que : $\|f - p_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- **Les polynômes de Bernstein.** On pose pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$: $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

Exemple 3 *Convergence uniforme de la suite des polynômes de Bernstein* SF 13 —

1. Soit $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$ fixés. On se donne une variable aléatoire S_n de loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$.
   a) Montrer que : $|p_n(x) - f(x)| \leq E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right)$.
   b) Justifier l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall x, y \in [0,1], \quad |x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
   c) Pose : $A = \left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| < \alpha\right\}$. Montrer que : $E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_A\right) \leq \varepsilon$.
   d) En déduire que : $|p_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$.
2. Montrer que la suite (p_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$ *i.e.* : $\|f - p_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$