1 Comatrice

- **Rappel.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En développant par rapport à la ligne i on obtient : $\det(A) =$

- **Vocabulaire.** Pour $i, j \in [\![1\,, n]\!]$, $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ est appelé le *cofacteur* de A associé à (i, j).

Définition 1

La *comatrice* de A, notée $\mathrm{com}(A)$, est la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont les cofacteurs de A :

Exemple 1 — Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ montrer que : $\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 2 — Pour $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ calculer $\mathrm{com}(A)$. Que constate-t-on lorsque A est inversible ?

Théorème 1

Exercice 1 — Démontrer le théorème.

Théorème 2

Si A est inversible, alors :

Attention C'est une formule théorique : ne pas l'utiliser pour inverser une matrice concrète.

Exercice 2 — Déduire cette formule du théorème précédent.

2 Déterminant d'un endomorphisme

- **Cadre.** • E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. • f est un endomorphisme de E.
  • $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E. • On pose : $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'} f$.

Exercice 3 — Montrer que : $\det(A) = \det(A')$.

Définition 2

On définit le déterminant de f par :

Exercice 4 SF 10 — Soit F, G deux sous-espaces supplémentaires de E.
On note s la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. Calculer le déterminant de s en fonction de $q = \dim G$.

Théorème 3 : Version endomorphisme des propriétés du déterminant

Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. 1. 2.

3. $f \in \mathrm{GL}(E)$ ssi

Exercice 5 — Démontrer le point 1.

3 Déterminants triangulaires par blocs

Théorème 4

Soient $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$:

Exercice 6 — Démontrer cette formule.

Exemple 3 — A l'aide de la formule précédente, calculer : $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.