III Coefficients binomiaux et formule du binôme

1 Coefficient binomial

Définition 1

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$, on définit le coefficient binomial « p parmi n », noté $\binom{n}{p}$ par

$$\binom{n}{p} =$$

• **Remarque.** Pour $p > n$ ou $p < 0$ on convient que :

Exercice 1 — Calculer : **a)** $\binom{6}{4}$ **b)** $\binom{7}{3}$

Théorème 1 : Formules à savoir

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $p \in [\![0, n]\!]$.

- *Symétrie :*
- *Formule de Pascal :*
- *Formule « sans nom » :*

• **Remarque.** Les formules restent vraies lorsque $p < 0$ ou $p > n$ avec la convention ci-dessus.

Exercice 2 — Démontrer la formule de Pascal.

Théorème 2 : Valeurs remarquables à connaître

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: • $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} =$ • $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} =$ • $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} =$

• **Remarque.** La formule de Pascal permet le calcul des $\binom{n}{\cdot}$ connaissant les $\binom{n-1}{\cdot}$ selon le schéma :

Formule de Pascal

$\dots$	$\binom{n-1}{p-1}$	$\binom{n-1}{p}$	$\dots$
		$\oplus$	

Le triangle de Pascal

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$
$n=0$							
$n=1$							
$n=2$							
$n=3$							
$n=4$							
$n=5$							
$n=6$							

2 Formule du binôme de Newton

Théorème 3 : Formule du binôme

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Exercice 3 — Développer les produits suivants : $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$ et $(a-b)^4$.

Exemple 1 ♥ — Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

Exercice 4 ♥ — Démontrer la formule du binôme par récurrence sur n et en utilisant la formule de Pascal.

SF 6 : calcul de somme par dérivation

♥

Exemple 2 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à calculer la somme : $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$.

Méthode : **a)** Compléter l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \dots$ **b)** Dériver l'égalité obtenue **c)** Evaluer en 1