Exemples de base

1 Montrer que $f:(x,y)\mapsto x$ et $g:(x,y)\mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

2 *SF 1* Justifier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de

$$f:(x,y)\mapsto \frac{\ln(x^2+y^2+1)}{e^x+y^2}$$

3 *SF 2* Montrer que $f:(x,y)\mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

4 *SF 3* Montrer que $f:(x,y)\mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

5 *SF 4* Calculer les dérivées partielles des fonctions

a) $f:(x,y)\mapsto x^3y+e^{xy^2}+x$

b) $g:(x,y)\mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

6 *SF 6* Montrer que $f:(x,y)\mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+y^2+1}}{e^x+y^2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

7 *SF 4* Trouver une équation du plan tangent en $(0,0)$ à la fonction $f:(x,y)\mapsto \operatorname{Arctan}(x+2y)$

8 *SF 8* Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Montrer que $F:t\mapsto f(t^2,\sin 2t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer F'.

Grands classiques

9 Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telle que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$. Que peut-on dire de f ?

10 *SF 7* Etudier les extremums de :

a) $f:(x,y)\mapsto x^2-3x+xy+y^2$

b) $f:(x,y)\mapsto x^2-y^2$

11 Soit $c\in\mathbb{R}$ et $u\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ tels que :

$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+c\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=0$$

Montrer : $\quad \forall t\in\mathbb{R},\quad u(x+ct,t)=u(x,0)$.

12 *SF 8* Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. On pose, pour tout $(r,\theta)\in\mathbb{R}^2$:

$$F(r,\theta)=f\big(r\cos\theta,r\sin\theta\big)$$

Soit $r\in\mathbb{R}^*$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Calculer $\nabla f\big(r\cos\theta,r\sin\theta\big)$ en fonction de $\dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)$

Démonstrations

- **Cadre.** $f:U\to\mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $p=(a,b)$ est un point de U

13 Montrer que si f admet un extremum local en (a,b), alors : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$

14 Démontrer la règle de la chaîne.

15 Soient $x,y\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ telles que $\gamma:t\mapsto\big(x(t),y(t)\big)$ est à valeurs dans U. Soit $k\in\mathbb{R}$. L'ensemble

$$\mathscr{C}_k=\{(x,y)\in U \mid f(x,y)=k\}$$

est appellé *ligne de niveau de f*. On suppose que γ est à valeurs dans $\mathscr{C}_k$. Montrer :

$$\forall t\in I,\quad \nabla f\big(\gamma(t)\big)\perp\gamma'(t)$$

16 *SF 8*

1. Soit $v=(h,k)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$.
Montrer que $\varphi_v:t\mapsto f(p+tv)$ est dérivable en 0 et que

$$\varphi_v'(0)=h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

On note $D_vf(p)=\varphi_v'(0)$ cette dérivée

2. Déterminer : $\quad \max\{D_vf(p)\,;\ \|v\|=1\}$.