Notation. Pour tout $\alpha > 1$, on pose : $\zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Exemples de base

1 SF 4 Calculer $\sum_{p,q\in\mathbb{N}} \frac{p^q}{e^{2p} q!}$

2 SF 4 Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \big(\zeta(n) - 1\big)$.

3 SF 6 Etablir : $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = \zeta(2)$

4 SF 6 Justifier la convergence et calculer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$

5 SF 7 Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la somme $\sum_{p,q\in\mathbb{N}^*} \frac{p}{(p+q)^\alpha}$ est-elle réelle ?

6 SF 1 SF 3 Soient $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Les familles ci-dessous sont-elles sommables ?

a) $\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ **b)** $\left(\frac{\sin(p+q)}{p^2q^2}\right)_{p,q\geq 1}$ **c)** $(z^{ij})_{i,j\geq 1}$

d) $\left(\frac{1}{n^2 - p^2}\right)_{\substack{n,p\geq 1\\ n\neq p}}$

7 SF 2 Justifier l'existence et calculer $\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}$

8 SF 5 On note I l'ensemble des entiers naturels non nuls n'ayant aucun diviseur premier autre que 2, 3 ou 5.

Pour tout $n \in I$, on pose : $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Justifier l'existence et calculer : $\sum_{n\in I} a_n$.

9 SF 8 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

Montrer que : $\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$

Grands classiques

10 SF 6 Calculer : $\sum_{p,q\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{pq(p+q-1)} = 2\zeta(2)$.

11 SF 4 Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z| < 1$.

Etablir : $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^{2p-1}}{1 - z^{2p-1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{1 - z^{2p}}$.

12 SF 8 Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!}$

Démonstrations

Somme des familles d'éléments de $[0, +\infty]$

13 Soit u_n une suite de réel positifs.

On rappelle que : $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \underset{\text{déf.}}{=} \sup_{J\in\mathscr{P}_f(\mathbb{N})} \left(\sum_{i\in J} u_i\right)$.

Montrer que : $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n & \text{si la série converge} \\ +\infty & \text{si la série diverge} \end{cases}$

14 Soit $(u_i)_{i\in I}, (v_i)_{i\in I}$ des familles de $[0, +\infty]$.
En revenant à la définition de la somme montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$: $\sum_{i\in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i\in I} u_i$

15 Soit $(u_i)_{i\in I}, (v_i)_{i\in I}$ des familles de $[0, +\infty]$.

1. a) En utilisant le théorème de sommation par paquets montrer que : $\sum_{i\in I} u_i + v_i = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$

b) En déduire que si $u_i \leq v_i$ pour tout $i \in I$: $\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I} v_i$

2. A l'aide du théorème de sommation par paquets montrer que pour toute permutation σ de I : $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}$

16 Soit $(u_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de $[0, +\infty]$.
A l'aide du théorème de sommation par paquets montrer que : $\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{ij}$

Familles sommables de nombres complexes

17 Soit $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de nombres réels. Montrer que chaque somme $\sum_{i\in I} u_i^+$ et $\sum_{i\in I} u_i^-$ est finie.

Ceci légitime la définition $\sum_{i\in I} u_i \underset{\text{déf.}}{=} \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-$

18 Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ des familles sommables de nombres réels. Montrer que $(u_i + v_i)_{i\in I}$ est sommable et que

$$\sum_{i\in I} u_i + v_i = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i (u_i)_{i\in I}$$

19 Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommables de nombres complexes.

Montrer que : $\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leq \sum_{i\in I} |u_i|$

20 Soit $\varepsilon > 0$ et $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommables de réels. Montrer qu'il existe une partie finie J de I telle que $\left|\sum_{i\in J} u_i - \sum_{i\in I} u_i\right| \leq \varepsilon$

21 Soit $(u_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille sommable de complexes. Avec le théorème de sommation par paquets montrer que la famille $\left(\sum_{j\in J} u_{ij}\right)_{i\in I}$ est sommable et : $\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{ij}$

22 Enoncer et démontrer le théorème relatif au produit de Cauchy de deux séries.