Exemples de base

1 **a)** On pose $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (1,2,3)$ et $u_3 = 1,1,2)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$

b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Les polynômes :

$$P_1 = X^2, \quad P_2 = a(X-1)^2 \quad \text{et} \quad P_3 = a^2X^2 + aX + 1$$

forment-ils une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

2 *SF 5* Calculer :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ a^2 & b^2 & bc & bd \\ a^2 & b^2 & c^2 & cd \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$

3 *SF 5* Calculer le déterminant suivant : $D_1 = \begin{vmatrix} 12 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

4 On pose $u_1 = (1,2,-1)$ et $u_2 = (-2,-1,1)$. Déterminer une équation du sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.

5 Calculer : $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

Grands classiques

6 *SF 5* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & & b & a \end{vmatrix}$

7 Pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ $(n \geq 2)$, on pose

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

1. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, tous distincts. Montrer que la fonction $P : x \mapsto V(a_1, \dots, a_n, x)$ vérifie

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad P(x) = V(a_1, \dots, a_n) \times \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$$

2. Expliquer sans détailler comment utiliser cette formule pour déterminer une expression explicite de $V(a_1, \dots, a_n)$.

8 Pour tout $n \geq 1$, on considère le déterminant de taille n :

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. En déduire D_n en fonction de n.

9 *SF 10* Soient E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces supplémentaires de E.
On note s la symétrie par rapport à F et parallèlement à G.
Calculer le déterminant de s en fonction de $q = \dim G$.

Démonstrations

10 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $\mathscr{B} = (b_1, \dots, b_n)$ est une base de E et $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_n)$ est une famille de n vecteurs de E.

1. Montrer que si $\mathscr{B}'$ est une autre base de E :

$$\det_{\mathscr{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathscr{B}'}(b_1, \dots, b_n) \times \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

2. Montrer que $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si : $\quad \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

11 Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que : $\quad \det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.
2. Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

12 Montrer que pour toute $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: $\quad \det(A^\top) = \det(A)$.

13 1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme : $\quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline * & \cdots & * & a_{n,n} \end{array}\right)$.

Montrer que : $\quad \det(A) = a_{n,n} \det(A')$

2. En déduire une démonstration de la formule de développement selon la colonne j.

14 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$A(\mathrm{com}A)^\top = (\mathrm{com}A)^\top A = \det(A) \times I_n$$

15 Soient E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
Montrer que : $\quad \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f\big) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'} f\big)$.

16 Soient $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
Montrer que : $\quad \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A) \times \det(B)$