Exemples de base

1 On pose : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Calculer $\sigma' \circ \sigma$ et σ^{-1}.

2 Soient $x_1, \dots, x_p \in [\![1, n]\!]$, distincts. Combien peut-on former de cycles de support $\{x_1, \dots, x_p\}$?

3 Ecrire

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 9 & 5 & 2 & 1 & 6 & 8 & 7 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

comme une composée de transpositions et calculer sa signature.

Démonstrations

Permutations

4 Soient $c = (x_1, \dots, x_p)$ et $c' = (y_1, \dots, y_q)$ deux cycles disjoints.
Montrer que : $c \circ c' = c' \circ c$.

5 Soit $\sigma \in S_n$. On définit sur $[\![1, n]\!]$ une relation $\sim$ par :

$$x \sim y \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid y = \sigma^k(x)$$

1. Montrer la relation « $\sim$ » est une relation d'équivalence sur $[\![1, n]\!]$
2. Soit $x \in [\![1, n]\!]$. On pose $\mathcal{O}_x = \{\sigma^k(x) ; k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{O}_x = \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{p-1}(x)\}$.
3. Montrer qu'il existe des cycles disjoints $c_1, \dots, c_r$ tels que $\sigma = c_1 \circ \cdots \circ c_r$.

Forme n-linéaire alternée

6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée sur E. Montrer que pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$: $f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n) = -f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

7 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée sur E. Montrer que pour toute famille liée $(x_1, \dots, x_n)$ de n vecteurs de E : $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

8 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E et $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ on note $a_{i,j}$ la i-ième coordonnée de x_j dans la base $\mathscr{B}$. Soit f une forme n-linéaire alternée sur E.

Montrer que : $f(x_1, \dots, x_n) = f(b_1, \dots, b_n) \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}$