• **Cadre.** E est un espace préhilbertien réel et F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

Exemples de base

1 Soit $a_0,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ *distincts*.

Montrer que $(P,Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2 SF 4 Soient $x_1,x_2,\dots,x_n \in \mathbb{R}$. Montrer que :
$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n\sum_{k=1}^{n} x_k^2$$
Dans quels cas y-a-t-il égalité ?

3 SF 4 Soit $f:[a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ continue.

Montrer que : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t \geq (b-a)^2$

4 Soit $a_0,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ *distincts*. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour $(P,Q) \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$

5 SF 7 Déterminer $\mathbb{R}_1[X]^\perp$ pour le produit scalaire défini sur $\mathbb{R}_2[X]$ par la relation
$$(P|Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$$

6 SF 7 Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ on note F l'ensemble des matrices diagonales. Déterminer $F^\perp$.

7 SF 9 Calculer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ sur le sous-espace vectoriel F des matrices diagonales de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

8 SF 9 Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien canonique, on pose :
$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=0 \quad \text{et} \quad z+t=0\right\}$$
Déterminer la matrice de p_F dans la base canonique.

9 SF 9 Calculer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ pour le produit scalaire $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

10 SF 12 Dans $\mathbb{R}^3$, on pose
$$P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-3z=0\right\} \quad \text{et} \quad \vec{u} = (2,2,1)$$
Calculer $d(\vec{u},P)$

11 SF 12 On pose : $H = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum\limits_{k=0}^{n} P(k) = 0\right\}$ et on munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P,Q) \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$.

Calculer $d(X^n,H)$

12
1. Prouver que la relation $(P\mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Orthonormaliser grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt la famille $(1,X,X^2)$.

Grands classiques

13 Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz (+ cas d'égalité)

14 Démontrer l'inégalité triangulaire (+ cas d'égalité)

15 Dans $\mathscr{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$, muni du produit scalaire
$$(f,g) \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$
on considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $f_n : t \mapsto \sin(nt)$.
Montrer que cette famille est orthonormale.

16 Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f$.
Montrer que pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$: $\quad a_{i,j} = \big(f(e_j) \mid e_i\big)$.

17 Montrer que pour $y \in F \setminus \{p_F(x)\}$: $\quad \|x-y\| > \|x-p_F(x)\|$

18 Trouver les réels a,b minimisant $I(a,b) = \displaystyle\int_0^1 (t^2-(at+b))^2\,\mathrm{d}t$

Démonstrations

19 Soient $A,B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer : $\quad \mathrm{tr}(A^\top B) = \sum\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} a_{i,j}b_{i,j}$

20 Enoncer et démontrer le théorème de Pythagore.

21 Soit $(u_1,\dots,u_p)$ est une famille orthogonale.

Montrer que : $\quad \left\|\sum\limits_{i=1}^{n} u_i\right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$

22 Toute famille orthogonale de vecteurs non-nuls est libre.

23 Soit $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_ie_i \in E$ et $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E. Montrer que : $\quad x_i = (x \mid e_i) \quad$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

24 Soit A une partie de E. Rappeler la définition de $A^\perp$ et démontrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

25 **a)** Montrer que $E = F \oplus F^\perp$. **b)** Montrer que $(F^\perp)^\perp = F$

26 Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base orthonormée de F.

Montrer que pour tout $x \in E$: $\quad p_F(x) = \sum\limits_{i=1}^{p} (x \mid e_i)\,e_i$

27 Soit H un hyperplan de E et a un vecteur normal à H. Montrer que pour tout $x \in E$:

a) $p_H(x) = x - \dfrac{(x\mid a)}{\|a\|^2}a$ **b)** $d(x,H) = \dfrac{|(x\mid a)|}{\|a\|}$

28 Soit $(u_1,\dots,u_n)$ une famille libre de E.
1. Rappeler la définition de l'orthonormalisée $(e_1,\dots,e_n)$ de Graam-Schmidt de la famille $(u_1,\dots,u_n)$
2. Démontrer par récurrence sur $k \in [\![1,n]\!]$ la propriété $\mathscr{P}_k$: « la famille $(e_1,\dots,e_k)$ est une base orthonormée du sous-espace $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k)$ »