Exemples de base

1 SF 2 Etudier la nature de :

a) $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ b) $\sum \frac{1}{n^2}$ c) $\sum \ln(1+\frac{1}{n})$ d) $\sum \frac{1}{n}$

2 SF 2 Etudier la nature de :

a) $\sum \frac{n}{3n+2}$ b) $\sum (1-\frac{1}{n})^n$ c) $\sum (1-\frac{1}{n})^{n^2}$

3 SF 4 Etudier la nature de a) $\sum \frac{\operatorname{th} n}{n^2+1}$ b) $\sum \frac{e^{\cos n}}{n}$

4 SF 4 Etudier la nature de :

a) $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ b) $\sum \sin\left(\frac{1}{n-\sqrt{n}}\right)$

c) $\sum n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}$

5 SF 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Montrer que la suite (u_n) converge.

6 SF 4 Etudier la nature de

a) $\sum e^{-\sqrt{n}}$ b) $\sum \frac{\sqrt{n}\, e^{\cos n} + \sin^2(n)}{n^3 - n}$

c) $\sum \frac{\sqrt{n}\, e^{\cos n} + \sin^2(n)}{n^{5/2} - n}$

7 SF 4 Soit $\alpha > 1$. Etudier la nature de :

a) $\sum \frac{\ln n}{n^4}$ b) $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ c) $\sum \frac{\ln n}{n^{3/2}}$ d) $\sum \frac{\ln n}{n^\alpha}$

8 SF 4 Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^{5/4}+1}$ converge.

9 SF 4 Etudier la nature de $\sum \frac{\left((-1)^n + i\right)\sin(\frac{1}{n})\ln n}{\sqrt{n+3}-1}$.

10 SF 6 Etudier la convergence absolue puis la convergence des séries :a) $\sum \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}\cos n}$ b) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

11 Soit $\alpha > 1$. On pose : $\zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

a) En déduire : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^\alpha} = \left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\zeta(\alpha)$

b) Etablir : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} = \left(1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)\zeta(\alpha)$

Grands classiques

12 SF 7 SF 8 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

13 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ décroissante positive de limite nulle.

1. Montrer que la série $\sum (-1)^n a_n$ converge.
2. Donner le signe ainsi qu'une majoration de la valeur absolue des restes de la série $\sum (-1)^n a_n$

14 Etudier la nature de : $\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$

Démonstrations

15 SF 1 Soit $q \in \mathbb{C}$.
Montrer que la série géométrique $\sum q^k$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et que dans ce cas : $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

16 Soit $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Montrer que la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge si et seulement si la suite (v_n) converge.

17 Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

18 Soit u une suite positive. Montrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si elle est majorée.

19 Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On suppose qu'*à partir d'un certain rang*, $0 \le u_n \le v_n$.

1. Montrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
2. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

20 Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ à termes positifs. On suppose que $u_n \sim v_n$.
Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

21 Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ à termes positifs .
On suppose que $u_n = O(v_n)$ et que $\sum v_n$ converge.
Montrer que $\sum u_n$ converge.

22 Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Montrer que si $\sum |u_n|$ converge alors $\sum u_n$ converge.