Exemples de base

1 On pose : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.
Déterminer une base de $\operatorname{Im} A$ et une base de $\operatorname{Ker} A$.

2 Déterminer le rang de :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 10 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

3 Trouver toutes les matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB - BA = I_n$.

4 *SF 10* On considère les trois matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que B est semblable à A.
b) Montrer que C est semblable à A.

5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $r = \operatorname{rg}(A)$. Montrer que A est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$ où $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$

6 *SF 14* Dans chacun des cas suivants, montrer que H est un hyperplan

a) $H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\right\}$
b) $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(2) + 2P'(1) = 0\}$
c) $H = \left\{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0)\right\}$

7 **a)** Soient $x_0 < \cdots < x_n$. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, donner l'expression des formes linéaires coordonnées pour la base $\mathscr{B} = (L_i)_{0 \le i \le n}$ des polynômes de Lagrange associés à $x_0, \ldots, x_n$.
b) Trouver une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dont les formes coordonnées sont les $\varphi_k : P \mapsto \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

8 On pose $H = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = 0\right\}$. Déterminer sans calcul la dimension de H.

9 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure à 2. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E distincts. Déterminer la dimension de $H_1 \cap H_2$.

Grands classiques

10 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $\quad |a_{i,i}| > \sum_{j \ne i} |a_{i,j}|$.
Montrer que A est inversible.

11 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et p est un projecteur de E. Montrer que : $\quad \operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$.

12 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E, F)$, de rang r. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F telles que : $\quad \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = J_r \quad$ où : $\quad J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Démonstrations

13 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
1. Montrer que A est inversible si et seulement si $\operatorname{Ker} A = \{0\}$
2. Montrer que A est inversible si et seulement si $\operatorname{rg} A = n$.

14 Etablir :
a) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \operatorname{rg} A \le \min(n, p)$
b) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad \operatorname{rg}(AB) \le \min\big(\operatorname{rg}(A), \operatorname{rg}(B)\big)$
c) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall P \in GL_n(\mathbb{K}), \quad \operatorname{rg}(PA) = \operatorname{rg}(A)$

15 Soit $(E, \mathscr{B})$ et $(F, \mathscr{C})$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie munis de bases.
1. Soit $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p) \in E^p$. Montrer : $\operatorname{rg} \mathscr{F} = \operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}))$
2. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Montrer que : $\quad \operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f))$

16 Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $r \in \mathbb{N}^*$.
Montrer qu'il y a équivalence entre :
i) $\operatorname{rg}(A) \ge r$;
ii) Il existe une matrice carrée A' extraite de A inversible de taille r.

17 Montrer que la similitude est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

18 Montrer que deux matrices semblables ont même trace mais que la réciproque est fausse.

19 Montrer que $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$ pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

20 Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
1. Montrer que si A est de rang r, alors A est équivalente à la matrice J_r.
2. Montrer que A et B sont équivalentes si et seulement si $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$.
3. En déduire que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^\top$

21 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. On note $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ les formes linéaires coordonnées dans $\mathscr{B}$.
1. Montrer que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.
2. Soit H est un hyperplan de E. Montrer qu'il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que :
$$H = \{x \in E \mid a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\}$$
où $(x_1, \ldots, x_n)$ désignent les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$

22 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E. Montrer qu'il y a équivalence entre :
i) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle de E.
ii) $E = H \oplus \operatorname{Vect}(e)$ pour un certain $e \ne 0$.

23 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, H un hyperplan de E et φ, ψ deux formes linéaires de E telles que $H = \operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \psi$.
Montrer que φ et ψ sont proportionnelles

24 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$.
1. Montrer que l'intersection de p hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de E dimension au moins $n - p$.
2. Montrer que tout sous-espace de E de dimension $n - p$ est l'intersection de p hyperplans de E.