## Exemples de base

**1** SF 10 Etudier la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

**2** SF 10 Trouver un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$

**3** SF 12 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

**4** SF 11 En appliquant l'inégalité de Taylor Lagrange à l'exponentielle, montrer que : $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e.$

**5** En remarquant que : $\quad \dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t \quad$ calculer la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

**6** SF 14 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k \geq n \ln n - n + 1$$

**7** SF 14 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Montrer que : $\quad H_n \sim \ln n$.

## Grands classiques

**8** SF 11 En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à une fonction bien choisie, montrer :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^z$$

**9** Soit $f \in \mathscr{CM}([a,b],\mathbb{R})$.

On souhaite montrer : $\quad \displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.$

1. Démontrer le résultat lorsque $f$ est en escalier.
2. Conclure dans le cas général.

**10** SF 15 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, décroissante. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1).$

## Démonstrations

• **Cadre.** $I$ est un intervalle non vide et non réduit à un point

**11** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$, continue par morceaux.
1. Donner l'expression des sommes de Riemann de $f$
2. Démontrer le résultat de convergence dans le cas où $f$ est lipschitzienne.

**12** Enoncer la formule de Taylor à reste intégral (avec ses hypothèses) et démontrer cette formule.

**13** Montrer que toute fonction lipschitzienne sur $I$ y est uniformément continue.

**14** Démontrer le théorème de Heine.

**15** Soit $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{K}$, continue par morceaux.
1. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe une fonction $\varphi$ en escalier sur $[a,b]$ telle que : $\|f-\varphi\|_\infty \leq \varepsilon$
2. Justifier l'existence d'une suite $(\varphi_p)$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ telle que $\quad \|f-\varphi_p\|_\infty \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$