## Exemples de base

**1** SF 1 On considère l'application linéaire
$$f : (x, y, z) \mapsto (2x + z, x - y + z)$$
de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

1. Donner la matrice de $f$ dans les bases
$$\mathscr{B} = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big) \quad \text{et} \quad \mathscr{C} = \big((1,0),(0,1)\big).$$
2. Donner la matrice de $f$ dans les bases
$$\mathscr{B} = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big) \quad \text{et} \quad \mathscr{C}' = \big((1,0),(1,1)\big).$$
3. Donner la matrice de $f$ dans les bases
$$\mathscr{B}' = \big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big) \quad \text{et} \quad \mathscr{C}' = \big((1,0),(1,1)\big).$$

**2** SF 1 On considère l'endomorphisme $f : P \mapsto P(X+1)$ de $\mathbb{R}_3[X]$. Donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

**3** SF 1 On considère l'endomorphisme $f : P \mapsto P - P'$ de $\mathbb{K}_n[X]$. Donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

**4** SF 1 Soit $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $E$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ : $b_i \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$ pour un certain $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Quelle est la matrice de $f$ dans $\mathscr{B}$ ?

**5** SF 3 SF 4 Trouver le noyau et l'image de l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}_2[X]$ représenté par $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

**6** SF 3 Soit $\varphi$ l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}_2[X]$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}\big(\varphi - 6\mathrm{Id}_E\big)$.
2. Trouver une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de $\varphi$ est diagonale.

**7** SF 1 SF 3 Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est : $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $f$ est une symétrie
2. Trouver une base de ses sous-espaces caractéristiques.
3. Ecrire la matrice de $f$ dans la base
$$\mathscr{B}' = (X+1, X^2+1, X^2+X+1)$$

**8** SF 6 Montrer que $f : P \mapsto P - P'$ est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

**9** SF 8 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$. On note $f$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$. On pose $u_1 = (5,2)$ et $u_2 = (2,1)$.

1. Déterminer une base de $F = \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et une base de $G = \operatorname{Ker}(f + 2\mathrm{Id})$
2. Exprimer la matrice $A'$ de $f$ dans la base $\mathscr{B}' = (u_1, u_2)$
3. Exprimer $A$ en fonction de $A'$. En déduire la valeur de $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

## Grands classiques

**10** SF 7 Soit $p$ un projecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$. Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $E$ dans laquelle la matrice de $p$ est de la forme : $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**11** SF 7 Soient $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$. Montrer qu'il existe une base dans laquelle $f$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**12** Soient $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. On note $L_1, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $x_1, \ldots, x_n$. On note $P$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ à la base $(L_1, \ldots, L_n)$.

a) Montrer que pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$ : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^j L_i = X^j$.

b) En déduire l'expression de $P^{-1}$.

## Démonstrations

**Cadre.** $E, F$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_p)$ est une base de $E$ et $\mathscr{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ est une base de $F$.

**13** Démontrer le résultat concernant la dimension de $\dim \mathscr{L}(E, F)$.

**14** Soient $x \in E$ et $y \in F$. On pose $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et on note $X$ (resp. $Y$) la colonne des coordonnées de $x$ (resp. $y$) dans $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{C}$). Montrer que $f(x) = y$ ssi $AX = Y$.

**15** Soient $(E, \mathscr{B})$, $(F, \mathscr{C})$ et $(G, \mathscr{D})$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie chacun muni d'une base, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$. Montrer que
$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$$

**16**
1. On suppose $E$ et $F$ de même dimension. Montrer que $f$ est bijective ssi $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(()f)$ est inversible.
2. En déduire qu'une famille $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ de $n$ vecteurs de $E$ est une base de $E$ si et seulement si $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}} \mathscr{F}$ est inversible
3. En déduire aussi qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$.

**17** Soit $\mathscr{B}'$ une autre base de $E$. Montrer que $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est inversible et que $(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

**18** Enoncer et démontrer la formule du changement de base pour les applications linéaires.