Exemples de base

Additionner ou multiplier ?

1 Combien y-a-t-il d'entiers pairs formés de trois chiffres (*i.e.* dans l'ensemble $[\![100,999]\!]$).

2 On forme des mots de n lettres avec un alphabet de p lettres. Combien peut-on former de mots ne contenant jamais deux lettres consécutives identiques ?

3 On tire une par une sans remise les boules d'une urne contenant n boules rouges distinctes et n vertes distinctes. Combien de tirages donnent un changement de couleur à chaque tirage ?

4 Trouver le nombre de couples $(x,y) \in [\![1,n]\!]^2$ tels que : **a)** $x \leq y$ **b)** $x+y \leq n$

Listes

5 SF 2

1. On lance un dé quatre fois de suite. Combien de résultats peut-on obtenir ?
2. Un jardinier doit installer une rangée de douze pots de plans de tomates. Combien de semi différents peut-il réaliser sachant qu'il peut semer entre 1 et 4 graines dans chaque pot ?

Arrangements

6 SF 3 Une joueuse assiste à une course de 15 chevaux et parie sur le premier, le second et le troisième cheval à l'arrivée. Combien y-a-t-il de tiercés gagnants possibles ?

7 SF 3 Combien y a t-il de façons de disposer 8 livres côte à côte (et à l'endroit) sur une étagère ?

8 SF 3 Combien d'anagrammes peut-on former à partir du mot CHEVAL ?

Combinaisons

9 SF 4 De combien de façons peut-on tirer 3 cartes simultanément dans un jeu de 32 ?

10 SF 4 Combien d'anagrammes peut-on former à partir du mot NARVAL, du mot ANAGRAMME ?

11 SF 4

1. Combien peut-on former de codes de carte bleue à l'aide de deux chiffres distincts ?
2. Combien y a-t-il de codes de carte bleue formés d'une suite de quatre chiffres strictement croissante ?

Grands classiques

12 On considère p boules identiques que l'on désire ranger dans n boîtes numérotées de 1 à n (chaque boîte peut recevoir un nombre quelconque de boules).

Montrer qu'il y a $\binom{n+p-1}{p}$ rangements possibles.

13 Etablir la formule de Pascal pour $n \geq 1$ et $p \in [\![0,n]\!]$ en comptant de deux façons le nombre de parties à $p+1$ éléments d'un ensemble $E = \{x_1,\dots,x_{n+1}\}$ de cardinal $n+1$.

14 Soit $E = \{x_1,\dots,x_n\}$ de cardinal $n \geq 1$ et $p \in [\![1,n]\!]$.

1. Montrer la formule « sans nom » en comptant le nombre de façon de former une équipe de p éléments de E dont un élément capitaine.
2. Montrer en procédant de même que pour tout $k \leq p$:
$\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$ (« formule des titulaires »)

15 SF 5

1. Déterminer le nombre a de couples (A,B) de parties de E tels que $A \cap B = \varnothing$
2. Plus généralement, pour $p \in [\![0,n]\!]$, déterminer le nombre de couples (A,B) de parties de E tels que $|A \cap B| = p$.
3. Déterminer le nombre b de couples (A,B) de parties de E tels que $A \subset B$.

16 SF 5 SF 6 On cherche à calculer :

$$S = \sum_{A \in \mathscr{P}(E)} |A|$$

1. Calculer S en sommant par paquet selon le recouvrement disjoint $\left(\mathscr{P}_k(E)\right)_{0 \leq k \leq n}$ de $\mathscr{P}(E)$.
2. Calculer S en exprimant $|A|$ à l'aide d'indicatrices.

17 Soient $a_1,\dots a_n \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe i et j tels que $0 \leq i < j \leq n$ et que : $a_{i+1} + \cdots + a_k \equiv 0\ [n]$.

Démonstrations

- **Cadre.** E et F sont des ensembles finis.

18 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $n = |E|$.

1. Déterminer le nombre de p-listes de E.
2. Déterminer le nombre de p-arrangements de E.
3. Déterminer le nombre de p-combinaisons de E.

19 Démontrer que $|\mathscr{F}(E,F)| = |F|^{|E|}$.

20 On pose $p = |E|$ et $n = |F|$. On suppose que $p \leq n$. Montrer qu'il y a en tout $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ injections de E dans F.

21 Montrer que : $|\mathscr{P}(E)| = 2^{|E|}$

22 Soient $A_1,\dots,A_n$ des parties de E.

1. Vérifier que :
$$\prod_{i=1}^{n}\left(1 - \mathbb{1}_{A_i}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}}$$
2. En déduire :
$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \left|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right|$$