Exemples de base

1 SF 1

1. Montrer que l'application $f: (x,y) \mapsto (y, 2x-3y, x+2y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ est linéaire.
2. Montrer que l'application $D: P \mapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que l'application $I: f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.
4. Montrer que l'application $T: f \mapsto f''+2f'+3f$ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2 Montrer que les applications suivantes ne sont pas linéaires : **a)** $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, 1+y) \end{array}$ **b)** $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x^2, y) \end{array}$

3 On considère les endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$

$$f: P \mapsto P - P' \quad \text{et} \quad D: P \mapsto P'$$

Calculer : $f \circ \sum\limits_{k=0}^{n} D^k$.

4 SF 7 Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - 2f + 3\mathrm{Id}_E = 0$. Montrer que $f \in \mathrm{GL}(E)$ et déterminer f^{-1}.

5 SF 2 On note f l'application $(x,y,z) \mapsto (2x+y-z, x-y)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. Trouver une base de $\operatorname{Ker} f$

6 Quel est le noyau de l'endomorphisme $D: P \mapsto P'$ de $\mathbb{R}[X]$?

7 Quel est le noyau de l'endomorphisme $T: f \mapsto f''+2f'+3f$ de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

8 Déterminer l'image de $f: (x,y) \mapsto (x+2y, 2x+y, -x+y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$

9 SF 6 Montrer que l'application $f: P \mapsto P - P'$ est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

10 Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Prouver que

$$F = \left\{ u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \right\}$$

est un plan vectoriel.

11 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $(b_1, \dots, b_n)$ une base de E. Soit $v \in E$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f(b_1) = \cdots = f(b_n) = v$. Que vaut $\operatorname{rg} f$?

12 SF 6 Montrer que

$$f: (x,y,z) \mapsto (y+z, z+x, x+y)$$

est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Grands classiques

13 Soit $h \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad \exists \lambda \in \mathbb{K} \mid h(x) = \lambda x$$

Montrer que h est une homothétie.

14 Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$

1. Etablir : $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
2. Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

15 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

a) Etablir : $\operatorname{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_E\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) = E$

b) Montrer que : $\operatorname{Im}\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) = \operatorname{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_E\right)$.

16 SF 8 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $g \circ f = 0$. Montrer : $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \leq n$

17 SF 6 Soient $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.
Montrer que l'application $\Phi: P \mapsto \left(P(x_1), \dots, P(x_n)\right)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^n$.

18 SF 6 Soit $T \in GL_n(\mathbb{K})$, triangulaire supérieure.
Montrer que T^{-1} est triangulaire supérieure.

19 SF 8 On suppose E de dimension finie n. Soit $u, v \in \mathscr{L}(E)$.
Montrer : $\operatorname{rg}(v \circ u) \geq \operatorname{rg} v + \operatorname{rg} u - n$.

20 SF 9 *Cf Ex. 71, banque INP* On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:
$F = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c = 0\right\}$ et $G = \operatorname{Vect}\left((1,1,1)\right)$

1. Vérifier que F et G sont supplémentaires
2. Soit $u = (x,y,z)$ et p le projecteur sur F parallèlement à G. Déterminer les coordonnées de $p(u)$.

21 SF 13 A l'aide d'une symétrie, établir :

$$\mathscr{S}_n \oplus \mathscr{A}_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

Démonstrations

Cadre. E, F, G sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

22 Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$

1. Montrer $g \circ f$ est une application linéaire
2. Montrer que si f est un isomorphisme de E sur F, alors f^{-1} est linéaire.

23 Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E et que $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. Montrer que f est injective ssi $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

24 On suppose que E possède une base $\mathscr{B} = (b_i)_{i \in I}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Montrer que f est injective ssi $\left(f(b_i)\right)_{i \in I}$ est libre.
2. Montrer que f est surjective ssi $\left(f(b_i)\right)_{i \in I}$ est génératrice de F.

25 On suppose que E possède une base $\mathscr{B} = (b_i)_{i\in I}$ .Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F. Montrer qu'il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $f(b_j) = u_j$ pour tout $j \in I$.

26 On suppose E de dimension finie. Montrer que F est isomorphe à E ssi F est de dimension finie et $\dim E = \dim F$.

27 Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. On suppose que $\operatorname{Ker} f$ possède un supplémentaire S dans E. Montrer que $\varphi : x \mapsto f(x)$ est un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} f$
2. En déduire la formule du rang lorsque E est de dimension finie.

28 On suppose E et F de même dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer que f est injective ssi f est surjective.

29 Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$ de rang fini. Montrer que $v \circ u$ est de rang fini et que $\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$.

30 On suppose E, F et G de dimensions finies. Soient f un isomorphisme de E sur F et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Montrer que $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$

31 Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ f = f$. Montrer que f est un projecteur