Exemples de base

1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_0^{n+1} \lfloor t \rfloor \,\mathrm{d}t$.

2 SF 4 Justifier que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie

3 SF 4 Justifier que l'intégrale I est bien définie :

a) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$. **b)** $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$

4 SF 5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+e^t}\,\mathrm{d}t$.
Etudier la monotonie de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\left|\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t^n}{n!} \cos t \,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$.

6 SF 7 Soit $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que : $\displaystyle\int_0^1 f = \int_0^1 f^2 = 1$.
Montrer que $f(t) = 1$ pour tout $t \in [0,1]$.

7 SF 5 SF 6 Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ dans chaque cas :

a) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) e^{-nt}\,\mathrm{d}t$ **b)** $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$

8 SF 5 SF 6 Etudier : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

9 Soit $x > 0$. Calculer : $\displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{t \operatorname{Arctan} t}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$

10 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Dans chaque cas, montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer φ' :

a) $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(x+t)\,\mathrm{d}t$ **b)** $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(x-t) \cos t\,\mathrm{d}t$

Grands classiques

11 SF 5 SF 6 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue par morceaux.
Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

12 SF 1 SF 6 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$.
Montrer que : $\displaystyle\int_a^b f(t) \sin nt\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

13 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue et T-périodique. Montrer :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

14 Soit f une fonction continue sur $[-a,a]$. Montrer que si f est paire : $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$

15 Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.
Montrer que : $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

16 Démontrer le théorème fondamental de l'analyse.

17
1. Montrer que $H : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et calculer H'
2. On note u la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

   Montrer que u est prolongeable par continuité en 1.
3. Calculer la limite en 1^+ de la fonction H.
4. H est-elle prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$?

Démonstrations

18 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ en escalier. Montrer que le scalaire $S(\sigma) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) y_i$ ne dépend pas de la subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ adaptée à f

19
1. Etablir la propriété de linéarité pour l'intégrale des fonctions en escalier.
2. En déduire la propriété de linéarité pour l'intégrale des fonctions continues par morceaux.

20 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$, continue par morceaux. Montrer que f est bornée sur $[a,b]$.

21 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$, continue par morceaux.
On admet qu'il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier telle que $\|f - \varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Montrer que la suite $\left(\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite ne dépend pas du choix de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

22 Soit $f \in \mathscr{CM}([a,b],\mathbb{K})$. Montrer que : $\left|\displaystyle\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

23 On suppose que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
On suppose f continue et positive sur $[a,b]$ et que $\displaystyle\int_a^b f = 0$.
Montrer que f est nulle sur $[a,b]$.

24 Soit $f \in \mathscr{CM}([a,b],\mathbb{R}_+)$ et $x_0 \in]a,b[$.
On suppose que $f(x_0) > 0$ et que f est continue en x_0.
Montrer que : $\displaystyle\int_a^b f > 0$

25 Soit $f \in \mathscr{CM}([a,b],\mathbb{R}_+)$ et $x_0 \in]a,b[$. On suppose que $f(x_0) > 0$ et que f est continue en x_0. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f > 0$

26 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et soient u, v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle J et à valeurs dans I.
Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur J et que : $\forall x \in J, \quad \varphi'(x) = v'(x) f\big(v(x)\big) - u'(x) f\big(u(x)\big)$