Techniques et calculs de base

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+n}$

2 Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

On suppose que $a_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq b_n$ et que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$.

Montrer qu'alors $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

3 *SF 3* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

a) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ **b)** $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

4 *SF 1* Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer une expression simple de : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)}$.

5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k k^2$.

6 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = H_n - H_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

7 *SF 2* Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

Grands classiques

8 *SF 6* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme : $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

9 Enoncer et démontrer l'inégalité de Jensen.

10 Démontrer la formule du binôme par récurrence sur n et en utilisant la formule de Pascal.

Démonstrations

11 Soit $n \in \mathbb{N}$. Etablir la formule donnant : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ par renversement.

12 Soit $n \in \mathbb{N}$. Etablir la formule donnant : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$ en commençant par développer $(k+1)^3 - k^3$.

13 Soient $q \in \mathbb{C}$ et $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$. Etablir la formule donnant : $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k$ en calculant $(1-q)\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k$

14 Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer la formule de factorisation de $a^n - b^n$ en calculant $(a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

15 Démontrer la formule de Pascal.