Exemples de base

Développements limités de référence

1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer :

a) $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$ **b)** $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$

2 Soit $n \geq 1$. Montrer :

a) $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$

b) $\operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$

3 Calculer le développement limité en 0 de :

a) exp à l'ordre n **b)** cos à l'ordre $2n$ **c)** tan à l'ordre 3

Calcul de développements limités

4 SF 2 SF 3 SF 4 SF 5 Dans chaque cas, calculer le développement limité suivant de φ au voisinage de 0 :

a) $\varphi(x) = \frac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3.

b) $\varphi(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}$ à l'ordre 3.

c) $\varphi(x) = e^x \ln(1+x)$ à l'ordre 2.

d) $\varphi(x) = (\operatorname{ch} x - 1)\ln(1+x)$ à l'ordre 6.

e) $\varphi(x) = e^{\sin x}$ à l'ordre 3.

f) $\varphi(x) = \frac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4.

g) $\varphi(x) = \frac{1}{1+e^{2x}}$ à l'ordre 3.

h) $\varphi(x) = \frac{e^{x^2}-1}{\sin(x^2)}$ à l'ordre 4.

5 SF 7 **1.** Déterminer un développement limité à l'ordre 3 au point $\frac{\pi}{3}$ de la fonction cos.

2. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 au point 2 de la fonction ln.

Equivalents

6 SF 1 Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de : $f(x) = x(1+\cos x) - 2\tan x$

7 SF 1 Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de : $\ln(1+x^2) - \sin^2 x$.

8 SF 1 Déterminer un équivalent de : $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

Calcul de limites

9 SF 5 Etudier la limite en 0 :

a) $g(x) = \frac{x(1+\cos x) - 2\tan x}{x^5}$ **b)** $h(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$

c) $k(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{\sin^3 x} - \frac{\sin x}{\operatorname{sh}^3 x}$

10 SF 5 Etudier la limite de : $u_n = \frac{1}{n} \frac{\operatorname{sh}\frac{1}{n}}{\operatorname{ch}\frac{1}{n} - 1}$

11 SF 5 Etudier la limite en 1 de : $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2-x}}{\ln(x) - \ln(2-x)}$

Etude locale de fonctions

12 SF 11 Montrer que $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(1+x)}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$

13 SF 12 Etudier localement au voisinage de 0 (prolongement par continuité, dérivabilité du prolongement en 0, équation de la tangente en 0 et position relative au voisinage de 0) la fonction $f : x \mapsto \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x}$

14 Montrer que $f : x \mapsto \frac{\operatorname{ch} x}{\cos x}$ a un minimum local en 0

15 SF 13 Montrer que la courbe de $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x}$ possède une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de son asymptote en $+\infty$.

Etude de suites

16 Déterminer un équivalent de $\binom{2n}{n}$.

17 **1.** Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation $e^x + x - n = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ admet une unique solution notée u_n

2. Montrer que u_n tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

3. Montrer que $u_n \sim \ln n$

4. Montrer que que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet le *développement asymptotique à deux termes* $u_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$

Grands classiques

18 SF 5 Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que : $\left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{ab}$

19 SF 5 Soit $f : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in I$ un point intérieur à I. Etudier limite en 0 de : $\frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$.

20 **1.** Enoncer et démontrer le théorème de primitivation d'un développement limité

2. Enoncer la formule de Taylor-Young puis démontrer ce résultat par récurrence.

Démonstrations

Cadre. I est un intervalle non vide et non réduit à un point, a est un point de I ou une de ses extrémités et f une fonction définie sur $D = I$ ou $I \setminus \{a\}$.

21 **1.** Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Montrer que si $u_n \sim v_n$ alors u_n et v_n ont même signe à partir d'un certain rang.

2. Quel est le signe de : $u_n = \operatorname{sh}\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n}$ à partir d'un certain rang ?

22 Montrer que si f possède en a un DL_n, alors la liste des coefficients du développement limité est unique.

23 Montrer que pour tout $q \in \mathbb{R}$: $q^n = o(n!)$