III Dérivation des fonctions composées

- **Cadre.** • U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ • $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U

1 Composition avec une fonction d'une variable

Théorème 1 : Règle de la chaîne

Soient $x, y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ est à valeurs dans U. La fonction $F : t \mapsto f\big(x(t), y(t)\big)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et pour tout $t \in I$:

Exemple 1 SF 8 — Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que $F : t \mapsto f(t^2, \sin 2t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer F'.

Exemple 2 *Equation de transport* — Soit $c \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tels que : $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0.$
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $u(x+ct, t) = u(x, 0)$.

Exercice 1 — Démontrer la règle de la chaîne.

- **Expression à l'aide du gradient.**

Si l'on pose $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ pour tout $t \in I$, alors $F = f \circ \gamma$ et la formule s'écrit :

Exercice 2 *Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau* — Soit $k \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathscr{C}_k = \{(x,y) \in U \mid f(x,y) = k\}$ est appellé *ligne de niveau de f*. On suppose que γ est à valeurs dans $\mathscr{C}_k$. Montrer : $\forall t \in I, \quad \nabla f\big(\gamma(t)\big) \perp \gamma'(t)$.

2 Dérivée selon un vecteur

- **Cadre.** • $p = (a,b) \in U$ est un point de U. • $v = (h,k)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 2

$\varphi_v : t \mapsto f(p + tv)$ est dérivable en 0 et

- **Vocabulaire.** On note $D_v f(p) = \varphi_v'(0)$ cette dérivée, appelée *dérivée de f selon le vecteur v*.

Exercice 3 SF 8 — Démontrer le théorème à l'aide de la règle de la chaîne.

Exercice 4 *Gradient et direction de plus forte pente* — On fixe $p = (a,b) \in U$. Déterminer : $\max\{D_v f(p) \,;\, \|v\| = 1\}$.

3 Composition avec une fonction de deux variables

Théorème 3 : Règle de la chaîne (bis)

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $x, y \in \mathscr{C}^1(V, \mathbb{R})$ telles que $(u,v) \mapsto \big(x(u,v), y(u,v)\big)$ est à valeurs dans U. La fonction $F : (u,v) \mapsto f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V et pour tout $(u,v) \in V$:

En résumé :

Exemple 3 SF 8 — Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On pose, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$: $F(r,\theta) = f\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big)$.
Soit $r \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\nabla f\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big)$ en fonction de $\dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)$