Théorème 3 : Caractérisation des intervalles

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$. Il y a équivalence entre :

i) I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

ii) Pour tous $x, y \in I$ tels que $x \le y$, on a $[x, y] \subset I$.

- **Remarque.** *(ii)* signifie : pour tous $x, y \in I$, I contient toutes les « valeurs intermédiaires » entre x et y.
- **Démonstration du théorème.**

•$(i) \implies (ii)$. Supposons par exemple que $I =]a, b]$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Soient $x, y \in I$ tels que $x \le y$ et soit $t \in [x, y]$. Alors : $a < x \le t \le y \le b$, en particulier : $a < t \le b$ *i.e.* $t \in I$

• $(ii) \implies (i)$. Supposons que I vérifie *(ii)* et montrons que I est un intervalle. On distingue quatre cas suivant que I soit majorée ou non majorée, minorée ou non minorée.
Traitons par exemple le cas où I est minorée et non majorée. I étant une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée, elle possède une borne inférieure m .
Alors I est l'un des deux intervalles $[m, +\infty[$ ou $]m, +\infty[$ suivant que m appartienne ou non à I :

- Si $m \notin I$, on procède par double inclusion :
  - Montrons que$I \subset]m, +\infty[$. En effet soit $x \in I$.
    Puisque m minore I : $x \ge m$. De plus $x \ne m$ car $m \notin I$, donc : $x > m$ *i.e.* $x \in]m, +\infty[$.
  - Montrons que $]m, +\infty[\subset I$. Soit $t \in]m, +\infty[$.
    Puisque $t > \inf I$, il existe $x \in I$ tel que $x < t$ (car t n'est pas un minorant de I).
    Puisque I n'est pas majoré, il existe $y \in I$ tel que : $y \ge t$.
    Ainsi : $x \le t \le y$ et $x, y \in I$ donc, par (ii) : $t \in I$.
- Si $m \in I$. On démontre exactement de la même façon que $I = [m, +\infty[$.