V Opérations élémentaires

1 Ecriture matricielle d'un système linéaire

- **Remarque.** Tout système linéaire peut s'écrire sous *forme matricielle*.

Exemple 1 — Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $\begin{cases} 3x+y-z &= 1 \\ -x \quad +z &= -3 \end{cases} \iff$

- **Vocabulaire.** Soit (S) un système de n équations à p inconnues écrit sous *forme matricielle* $AX = B$
- $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est la colonne des inconnues • $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le *second membre* • $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la *matrice* du système

Théorème 1

Le système $AX = B$ est compatible ssi :

- **Vocabulaire.** Si A est inversible, on dit que le système $AX = Y$ est de Cramer.

Exercice 1 — Montrer qu'un système de Cramer possède une unique solution.

2 Matrices d'opérations élémentaires

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Comme pour les système, on dispose de trois types d'opérations élémentaires sur les lignes de A

Type 1. Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul notée :

Type 2. Addition à une ligne d'un multiple d'une autre ligne notée :

Type 3. Echange de deux lignes, notée :

- **Remarque.** On définit de même des opérations élémentaires sur les colonnes de A.

Théorème 2 : Interprétation en termes de produits matriciel

Type 1. Effectuer $L_i \longleftarrow \alpha L_i$ revient à multiplier A à gauche par

Type 2. Effectuer $L_i \longleftarrow L_i + \beta L_j$ revient à multiplier A à gauche par

Type 3. Effectuer $L_i \longleftrightarrow L_j$ revient à multiplier A à gauche par

Démonstration. On calcule PA dans chaque cas et on constate que le résultat correspond à la matrice obtenue en effectuant l'opération élémentaire correspondante. □

- **Remarque.** Opérer sur les colonnes de A revient à multiplier *à droite* par l'une des matrices précédentes.

Théorème 3

Les matrices d'opérations élémentaires sont :

Exercice 2 — Démontrer que toute matrice de l'un des trois types ci-dessus est inversible.

- **Conséquence.** Opérer sur les lignes revient à multiplier à gauche par une matrice inversible.

3 Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Exercice 3 *Situation modèle* — On suppose avoir transformé A en I_n après k opérations élémentaires. Montrer que A est inversible et donner une expression de A^{-1}.

SF 2 : méthode du pivot pour calculer A^{-1}

- On transforme A en I_n par des opérations élémentaires sur les lignes de A.
- On effectue en parallèle les mêmes opérations sur I_n : elles transforment I_n en A^{-1}.

Exemple 2 — A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse. **a)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4 — Montrer qu'une matrice triangulaire est inversible ssi tous ses coefficients diagonaux sont non nuls