# IV Borne supérieure, borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$

- **Cadre.** • On considère une partie $A$ de $\mathbb{R}$.

## 1 Rappel : plus grand/plus petit élément pour l'ordre naturel $\leq$

- **Rappel.** • On appelle *plus grand élément* (P.G.E.) de $A$ tout majorant de $A$ qui appartient à $A$
  • On définit de même la notion de plus petit élément (P.P.E.).

**Exemple 1** — **a)** $A = \left\{\frac{1}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est-elle majorée ? minorée ? **b)** Possède-t-elle un plus grand/petit élément ?

**Théorème 1 : Cas des parties de $\mathbb{N}$**

*i)*Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède : *ii)*Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède :

**Exercice 1** — **1.** Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. A l'aide du théorème précédent, justifier l'existence de : $a \wedge b$ et $a \vee b$.
**2.** Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{P}$. Justifier l'existence de $v_p(a)$.

**Attention** Ce théorème est faux pour une partie de $\mathbb{R}$. Par exemple :

## 2 Borne supérieure/inférieure

**Définition 1**

- La borne supérieure de $A$ est, s'il existe :
- La borne inférieure de $A$ est, s'il existe :

- **Remarque.** Si $A$ possède un plus grand élément $M$, alors :

**Attention**

**Exemple 2** — Déterminer les bornes supérieures et inférieures de :**a)** $I = [2, 3[$. **b)** $A = \left\{\frac{1}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$

**Théorème 2 : Propriété de la borne supérieure**

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède :
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède :

**Exercice 2** *Th. de la limite monotone* — Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée. *Démontrer* que $u$ converge.

**Exemple 3** ♥ — Soit $I$ un intervalle non vide. Pour toute fonction bornée $f : I \to \mathbb{R}$, on pose : $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$
Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$, bornées et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Etablir : **a)** $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ **b)** $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \times \|f\|_\infty$

**Théorème 3 : Caractérisation des intervalles**

Soit $I$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Il y a équivalence entre :

*i)* $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. *ii)*

## 3 Borne supérieure et suites

- **Cadre.** $A$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

**Théorème 4**

Soit $M$ un majorant de $A$.
Il y a équivalence entre : *i)* $M = \sup A$ *ii)*

**Exercice 3** — Démontrer cette équivalence

**Exercice 4** ♥ — Montrer que si $A$ n'est pas majorée, il existe une suite d'éléments de $A$ de limite $+\infty$

**SF 13 : Utiliser les suites pour montrer que $M = \sup A$**

• On montre que $M$ majore $A$. • On construit une suite $(a_n)$ d'éléments de $A$ telle que $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} M$.

**Exemple 4** — Déterminer les bornes supérieures et inférieures de :**a)** $I = [2, 3[$ **b)** $A = \left\{\frac{q}{2^p + q}\ ;\ p, q \in \mathbb{N}^*\right\}$

**Exemple 5** — Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, bornée. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a_n = \inf\{u_k\ ;\ k \geq n\}$. Montrer que $(a_n)$ est croissante.

## 4 Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

- **Notation.** On pose : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ • On étend à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation $\leq$ en posant pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}}$ : $-\infty \leq x \leq +\infty$
- **Remarque.** La notion de borne supérieure/inférieure peut aussi être définie dans $\overline{\mathbb{R}}$.

**Exemple 6** — **a)** $\sup \mathbb{R}_+ =$ **b)** $\sup \varnothing =$

- **Propriété de la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.** Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$