III Nature d'une série dans le cas général

1 Convergence absolue

Théorème 1

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum |u_n|$ converge alors :

Exemple 1 ☢ ***Attention*** ☢ — Donner un exemple de série convergente mais non absolument convergente.

Exercice 1 — Démontrer le théorème.

Exemple 2 — Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^{5/4}+1}$ converge.

Théorème 2 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si : *i)* *ii)* *iii)*

Alors :

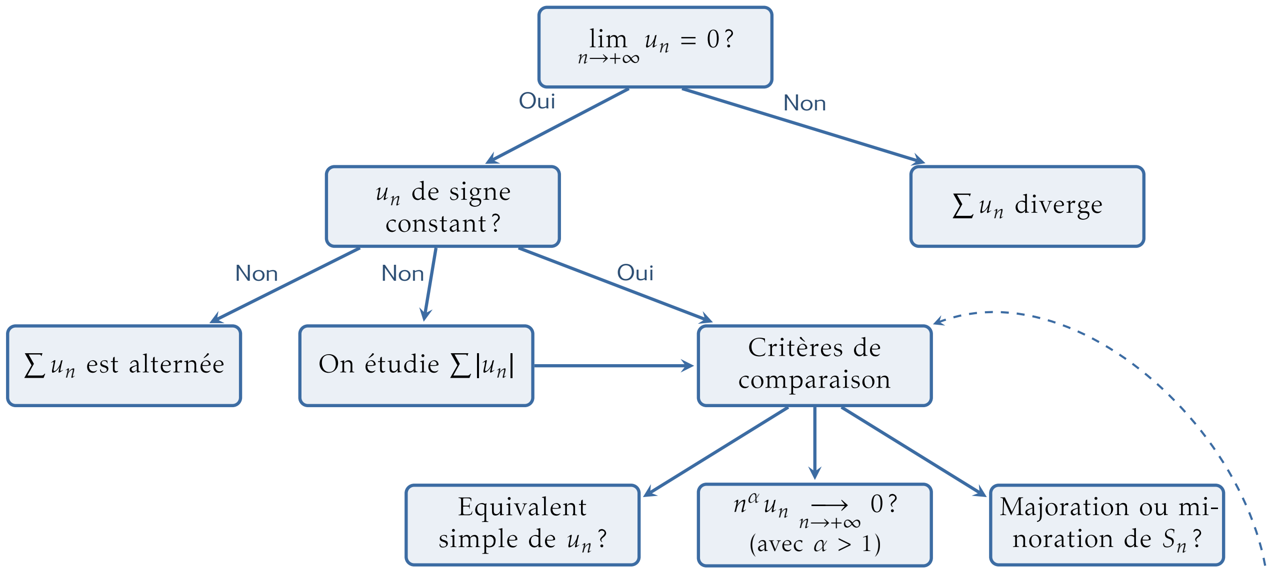
Exemple 3 *Ex. 7.2, banque INP* — Etudier la nature de $\sum \frac{((-1)^n+i)\sin(\frac{1}{n})\ln n}{\sqrt{n+3}-1}$.

☢ **Attention** ☢ Le critère d'équivalence n'est plus valable pour les séries à terme général de signe non constant

2 Bilan des techniques

Rappel : séries de références

- La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi :
- La série de Riemann alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge ssi :



SF 6 : Utiliser les DL pour étudier la nature de $\sum u_n$

On découpe u_n en morceaux plus simples puis on applique les critères de comparaison à chacun des morceaux

Exemple 4 *SF 6* — Etudier la convergence absolue puis la convergence des séries de terme général :

a) $u_n = \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}\cos n}$ **b)** $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

Exemple 5 ♥ *Ex. 46, banque INP* — On considère la série de terme général $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ (où $n \geq 1$)

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

Exemple 6 — Soit $\alpha > 1$. Etablir : **a)** $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^\alpha} = \left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\zeta(\alpha)$ **b)** $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} = \left(1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)\zeta(\alpha)$