II Composition, réciproque

1 Composition des applications

- **Cadre.** • $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des applications.

Définition 1

La *composée de f par g* est l'application $g \circ f : E \to G$ définie par :

- **Attention** . En général $g \circ f \neq f \circ g$.

Théorème 1 : Associativité

Si $h : G \to H$ est une application :

Exercice 1 — Démontrer ce théorème

Définition 2

• L' *identité de E* est l'application Id_E : • •

Théorème 2

- Si f et g sont injectives, alors :
- Si f et g sont surjectives, alors :
- Si f et g sont bijectives, alors :

Exercice 2 ♥ — Démontrer les deux premiers points

2 Réciproque d'une bijection

Définition 3

Soit $f : E \to F$ une application **bijective**. La *réciproque* de f est l'application $f^{-1} : F \to E$ qui, à tout $y \in F$,

associe **son unique** antécédent par f : •

Pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$: •

Exemple 1 — L'application $f : x \mapsto e^x$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de réciproque :

- **Remarque.** Si f est bijective : 1. 2.

Théorème 3

Si $f : E \to F$ est bijective : 1. 2.

Théorème 4 : Réciproque du théorème précédent

Soit $f : E \to F$ une application. On suppose qu'il existe $g : F \to E$ telle que : $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
Alors :

Exercice 3 ♥ — Démontrer le théorème en établissant l'injectivité puis la surjectivité de f.

- **Conséquence.** Si f est bijective alors f^{-1} l'est aussi et : $(f^{-1})^{-1} = f$

SF 8 : Trois méthodes pour montrer que $f : E \to F$ est bijective

Méthode 1 :	Méthode 2 :	Méthode 3 :

Exemple 2 — Dans chacun des cas, prouver que f est bijective et déterminer sa réciproque.
a) $f : t \mapsto (1-t)a + tb$ de $[0,1]$ sur $[a,b]$ $(a < b)$ **b)** $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}^*$ **c)** $f : z \mapsto \frac{z+i}{z-i}$ de $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$

Théorème 5 : Réciproque d'une composée

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et :

Exercice 4 ♥ — Démontrer le théorème précédent.