V Approximations d'un nombre réel

- **Cadre.** • On donne $x \in \mathbb{R}$ et on souhaite approcher x par : 1. des nombres décimaux 2. des rationnels
- **Rappel.** La *partie entière de* x est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

- **Inégalités à connaître.** • •

1 Approximation décimale

- **Rappel.** Un nombre décimal est un réel de la forme :

- **Notation.** L'ensemble des nombres décimaux est noté :

Exemple 1 — On prend $x = \pi$.

a) Calculer : $y_1 = \dfrac{\lfloor 10x \rfloor}{10}$ et $z_1 = \dfrac{\lfloor 10x \rfloor + 1}{10}$

b) Définir de façon similaire y_2 et z_2 en fonction de x pour que $y_2 = 3.14$ et $z_2 = 3.15$

Définition 1

- Pour $n \in \mathbb{N}$, l'*approximation décimale de x à 10^{-n} près par défaut* est le décimal :

- Pour $n \in \mathbb{N}$, l'*approximation décimale de x à 10^{-n} près par excès* est le décimal :

Théorème 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. 2. 3.

Exercice 1 — Démontrer le théorème précédent.

- **Conséquence.** Les suites (y_n) et (z_n) convergent vers x.

Exercice 2 — Montrer que les suites (y_n) et (z_n) sont adjacentes.

2 Approximation par des rationnels

- **Rappels.**
  1. Les nombres rationnels (ensemble noté $\mathbb{Q}$) sont les réels de la forme :

  2. On dispose des inclusions suivantes :

  3. Les nombres irrationnels sont les éléments de :

Théorème 2

1. Tout nombre réel est :
2. Tout intervalle ouvert non vide possède un rationnel *i.e.* :

- **Vocabulaire.** On dit que $\mathbb{Q}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 — Démontrer le théorème précédent.

Théorème 3

Tout nombre réel est :

Exercice 4 — Démontrer le théorème précédent.

Théorème 4

Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Il y a équivalence entre :

i) Tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

ii) Tout intervalle ouvert non vide possède un élément de A.

On dit alors que A est *dense* dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5 — Démontrer l'implication $ii) \implies i)$ du théorème.