

IV Application au calcul de primitives

Factions rationnelles

- **Cadre.** Etant donné $F \in \mathbb{R}(X)$ on cherche à calculer $\int_a^b F(t) dt$.
- **Objectif.** On cherche une primitive de F .

SF 14 : Méthode générale

On décompose F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, on est ramené à primitiver des « morceaux » de 3 types :

Fonction	Type 1 Polynôme (partie entière)	Type 2 fonctions $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^k}$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$	Type 3 fonctions $x \mapsto \frac{ax+b}{x^2+px+q}$, avec $p^2-4q < 0$
Primitive		<ul style="list-style-type: none"> • Si $k = 1$: • Si $k \geq 2$: 	<p>i) On fait apparaître la forme $\frac{u'}{u}$ i.e. on fait apparaître $u'(x) = 2x+p$ au numérateur (factoriser par $\frac{a}{2}$ puis ajouter et retrancher p)</p> <p>ii) Le « morceau » restant se primitive à l'aide d'un arctangente</p> <p>Rappel :</p>

Exemple 1 Exemple pour le type 3 — Déterminer une primitive de : **a)** $x \mapsto \frac{3+4x}{x^2+4}$ **b)** $x \mapsto \frac{x+3}{x^2+2x+5}$

Exemple 2 — Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4t^5}{t^4-1} dt$

Exemple 3 — Calculer $\int_0^x \frac{t}{(t^2+t+1)(1+t)^3} dt$ pour tout $x > 0$ et étudier sa limite lorsque x tend vers $+\infty$