1 Développements limités et équivalence

Théorème 1

On suppose que f admet en a le DL_n : $f(x) \underset{x\to a}{=} a_p(x-a)^p + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ avec $a_p \neq 0$.

Alors :

-

-

SF 1 : Pour trouver un équivalent de f au voisinage de a

Il suffit de trouver le *premier terme non nul* de son développement limité en a.

Exemple 1 — Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de : $f(x) = x(1+\cos x) - 2\tan x$

Exemple 2 — Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de : $\ln(1+x^2) - \sin^2 x$.

Exemple 3 — Déterminer le signe, à partir d'un certain rang, de : $u_n = \operatorname{sh}\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n}$

Exemple 4 — Déterminer un équivalent de : $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

2 Développements limités et limites

SF 5 : Utiliser les DL pour lever une forme indéterminée

Exemple 5 — Etudier la limite en 0 :

a) $g(x) = \dfrac{x(1+\cos x) - 2\tan x}{x^5}$ **b)** $h(x) = \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}$ **c)** $k(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\sin^3 x} - \dfrac{\sin x}{\operatorname{sh}^3 x}$

Exemple 6 — Etudier la limite de : $u_n = \dfrac{1}{n}\dfrac{\operatorname{sh}\frac{1}{n}}{\operatorname{ch}\frac{1}{n} - 1}$

Exemple 7 — Etudier la limite en 1 de : $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2-x}}{\ln(x) - \ln(2-x)}$

Exemple 8 — Soit $f : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in I$ un point intérieur à I.
Etudier limite en 0 de : $\dfrac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$.

Exemple 9 — Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que : $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{ab}$