1 L'inégalité des accroissements finis

Théorème 1 : (Admis provisoirement)

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

On suppose que f' est bornée sur I :

Alors :

Définition 1

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $k \geq 0$. On dit que f est *k-lipschitzienne sur D* si :

$$\forall x, y \in D, \quad \left|f(x) - f(y)\right| \leq k\left|x - y\right|$$

Exemple 1 SF 13 — Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ est $\dfrac{1}{4}$-lipschitzienne sur $[0,1]$.

SF 12 : Utilisation pour établir des inégalités

Exemple 2 ♥ — **a)** Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leq |x|$ **b)** Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq \ln(1+x) \leq x.$

2 Notions sur les suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

- **Cadre.** • $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction • On étudie une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$

Définition 2

Un intervalle $I \subset D$ est *stable* par f si $\quad f(I) \subset I \quad$ *i.e.* :

- **En pratique.** Si I est stable par f et si $u_0 \in I$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à termes dans I.

Exemple 3 — Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On cherche à définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation : $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas définie si $u_0 \notin [-2,2]$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie si $u_0 \in [-2,2]$.

Théorème 2 : Critère « $f(\ell) = \ell$ »

Si (u_n) converge vers $\ell \in D$ et si $\boxed{f \text{ est continue en } \ell}$, alors ℓ est un *point fixe* de f : $\boxed{f(\ell) = \ell}$

Attention Ce théorème ne prouve jamais la convergence de la suite

3 Application à l'étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

- **Objectif.** Montrer que la suite (u_n) converge vers un point fixe α de la fonction f.
- **Hypothèse fondamentale:** f est k-lipschitzienne de rapport $k \in]0,1[$.

Exemple 4 — Soit $u_0 \in [0,1]$. On considère la suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{e^{u_n} + 1}$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie et à valeurs dans $[0,1]$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [0,1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
3. Montrer que la suite u converge vers α.

SF 14 : les étapes clés pour montrer que $u_n \to \alpha$

- *Application de l'IAF.* Pour tout n, $\quad |f(u_n) - f(\alpha)| \leq k|u_n - \alpha| \quad$ c'est à dire : $\quad |u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$
- *Par récurrence sur n.* $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |u_n - \alpha| \leq k^n|u_0 - \alpha|$.
- *Théorème d'encadrement.* Puisque : $\quad k \in [0,1[, \quad k^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad$ donc : $\quad |u_n - \alpha| \to 0$ *i.e.* : $\quad u_n \to \alpha$.