1 Déterminants de n vecteurs dans une base

- **Cadre.** • E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n • $\mathscr{B}=(b_1,\dots,b_n)$ est une base de E.
- **Rappel..** Le *déterminant dans la base* $\mathscr{B}$ l'application $\det_{\mathscr{B}} : E^n \to \mathbb{K}$ définie par

$$\forall x_1,\dots,x_n\in E,\quad \det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\Big(\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j}\Big),$$

où $a_{i,j}$ est la i-ième coordonnée de x_j dans la base $\mathscr{B}$.
L'objectif de cette note est de démontrer les points 2 et 3 du théorème suivant.

Théorème 1

1. L'application $\det_{\mathscr{B}}$ est une forme n-linéaire alternée.
2. Toute autre forme n-linéaire alternée E est un multiple de $\det_{\mathscr{B}}$.
3. $\det_{\mathscr{B}}$ est l'unique forme linéaire alternée vérifiant $\underbrace{\det_{\mathscr{B}}(b_1,\dots,b_n)}_{\text{noté } \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B})}=1$.

Démonstration des points 1 et 3 du théorème

1. Montrons que $\det_{\mathscr{B}}$ est n-linéaire et alternée.
   - *n-linéarité*. Il suffit de montrer que chaque application $f_\sigma : (x_1,\dots,x_n)\mapsto \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j}$ est n-linéaire.

     Soit $\sigma\in S_n$, $i\in[\![1,n]\!]$ et $x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n\in E$.
     Pour tout $x\in E$: $\quad f_\sigma(x_1,\dots,x_{i-1},x,x_i,x_n)=\underbrace{\Big(\prod_{j\neq i} a_{\sigma(j),j}\Big)}_{\text{indép. de } x}\varphi_{\sigma(i)}(x)$

     où $\varphi_{\sigma(i)}$ est la $\sigma(i)^{\text{e}}$ forme linéaire coordonnée dans la base $\mathscr{B}$.
     Ainsi la linéarité de $\varphi_{\sigma(i)}$ assure la linéarité de f_σ par rapport à sa i^{e} variable.
   - *Alternance*. Soit $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$. Supposons par exemple que $x_1=x_2$ et montrons que $\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)=0$.
     On pose $\tau=(1,2)$ et on effectue le changement d'indice « $\sigma=s\circ\tau$ » dans la somme :

     $$\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j}\underset{\sigma=s\circ\tau}{=}\sum_{s\in S_n}\underbrace{\varepsilon(s\circ\tau)}_{\substack{=\varepsilon(\tau)\times\varepsilon(s)\\=-\varepsilon(s)}}\prod_{j=1}^n a_{(s\circ\tau)(j),j}=-\sum_{s\in S_n}\varepsilon(s)\underbrace{a_{s(2),1}\,a_{s(1),2}}_{\substack{=a_{s(2),2}\,a_{s(1),1}\\(\text{car } x_1=x_2)}}\prod_{j=3}^n a_{s(j),j}$$

     Ainsi : $\quad\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)=-\sum_{s\in S_n}\varepsilon(s)\prod_{j=1}^n a_{s(j),j}=-\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)\quad$ et donc : $\quad\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)=0.$
2. Traité en classe [1], précisément on a vu que si f est une forme n-linéaire alternée sur E, alors pour tous

   $x_1,\dots,x_n\in E$: $\qquad f(x_1,\dots,x_n)=f(b_1,\dots,b_n)\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\Big(\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j}\Big)=f(b_1,\dots,b_n)\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)$.

   Autrement dit : $\quad f=k\det_{\mathscr{B}}\quad$ où : $\quad k=f(b_1,\dots,b_n)$.
3. Prenons $(x_1,\dots,x_n)=(b_1,\dots,b_n)$ dans la définition de $\det_{\mathscr{B}}$. Les coordonnées $a_{i,j}$ sont donc données par $a_{i,i}=1$ et $a_{i,j}=0$ si $i\neq j$. Ainsi, pour $\sigma\in S_n$ distincte de l'identité, il existe j_0 tel que $\sigma(j_0)\neq j_0$. Pour cet indice, $a_{\sigma(j_0),j_0}=0$ donc $\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j}=0$. La somme se réduit donc au seul terme obtenu pour $\sigma=\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$:

$$\det_{\mathscr{B}}(b_1,\dots,b_n)=\varepsilon(\mathrm{Id})\prod_{j=1}^n a_{j,j}=1.$$

1. Cf. Exercice 4 de la partie II « Formes n-linéaires alternées » du complément sur les permutations