1 Construction de l'ensemble des polynômes : correction des exercices

Correction de l'exercice 1. Avec les notations de la définition : $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont deux suites nulles à partir d'un certain rang, il existe donc des rangs $p, q \in \mathbb{N}$ pour lesquels :

$$\forall k > p, \quad a_k = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall k > q, \quad b_k = 0$$

a) Il s'agit de montrer que chacune des suites $(a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang :

- Concernant $P+Q$, pour tout $k > \max(p,q)$: $a_k + b_k = 0$.
- Concernant $P \times Q$, on va montrer que $c_k = 0$ dès que $k > p+q$.

  Soit $k > p+q$. Par définition de c_k : $c_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \underbrace{a_i}_{\substack{=0 \text{ si}\\ i>p}} b_{k-i} = \sum_{i=0}^{p} a_i \underbrace{b_{k-i}}_{\substack{=0 \text{ car}\\ k-i \geq k-p > q}} + \sum_{i=p+1}^{k} \underbrace{a_i}_{\substack{=0 \text{ car}\\ i>p}} b_{k-i} = 0$

b) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda \times P = (\lambda a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Par définition : $\lambda = (d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ où $d_0 = \lambda$ et $d_k = 0$ pour tout $k \geq 1$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le coefficient d'indice k du produit $\lambda \times P$ vaut donc : $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} d_i a_{k-i} = d_0 a_k = \lambda a_k$.

Ceci prouve donc que $\lambda \times P = (\lambda a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Correction de l'exercice 2 (démonstration du théorème 1).
On sait déjà que $+$ et $\times$ sont des lois de composition internes sur $\mathbb{K}[X]$.
Soient $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}, Q = (b_k)_{k\in\mathbb{N}}, R = (c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$.

- $\big(\mathbb{K}[X], +\big)$ *est un groupe commutatif.* Par définition des polynômes : $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
  Montrons que $\mathbb{K}[X]$ est un sous-groupe de $\big(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +\big)$:
  i) La suite nulle $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ est un polynôme.
  ii) $P + Q = (a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$ d'après l'exercice 1.
  iii) $-P = (-a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$ car si p est un rang tel que $a_k = 0$ pour tout $k > p$ alors $-a_k = 0$ pour tout $k > p$.

- *La loi $\times$ est commutative.* Pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\underbrace{\displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}}_{\substack{\text{coef. d'indice } k\\ \text{de } PQ}} \underset{j=k-i}{=} \underbrace{\displaystyle\sum_{j=0}^{k} b_j a_{k-j}}_{\substack{\text{coef. d'indice } k\\ \text{de } QP}}$ donc $PQ = QP$.

- *La loi $\times$ est associative.* Posons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = P \times Q$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = Q \times R$, $(\alpha_n) = (P \times Q) \times R$ et $(\beta_n) = P \times (Q \times R)$.
  Il s'agit de montrer que : $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} u_k c_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) c_{n-k} = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\sum_{k=i}^{n} b_{k-i} c_{n-k}\right) \underset{j=k-i}{=} \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\sum_{j=0}^{n-i} b_j c_{(n-i)-j}\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i v_{n-i} = \beta_n$$

- 1 *est neutre pour* $\times$. En prenant $\lambda = 1$ dans le résultat de la question **b.** de l'exercice 1 : $1 \times P = (1 \times a_k)_{k\in\mathbb{N}} = P$.

- *La loi $\times$ est distributive sur $+$.* Pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\underbrace{\displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i (b_{k-i} + c_{k-i})}_{\substack{\text{coef. d'indice } k \text{ de}\\ P(Q+R)}} = \underbrace{\displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} + \sum_{i=0}^{k} a_i c_{k-i}}_{\substack{\text{coef. d'indice } k \text{ de}\\ PQ+PR}}$

  Ceci prouve que : $P(Q+R) = PQ + PR$

Correction de l'exercice 3. On pose : $X \underset{\text{déf.}}{=} (0, 1, 0, \ldots)$.
Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $X^k = (\underset{\overset{\uparrow}{0}}{0}, \underset{\overset{\uparrow}{1}}{0}, \ldots, 0, \underset{\overset{\uparrow}{k}}{1}, 0, \ldots)$.

- *Pour $k = 0$.* Par convention : $X^0 = 1$ (élément neutre de $\times$) et par définition : $1 = (1, 0, 0 \ldots)$.

- *Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons le résultat vrai au rang k i.e.* : $(X^k) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout $k \in \mathbb{N}$: $b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

  Par définition : $X = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout $k \in \mathbb{N}$: $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

  Par définition du produit : $X^{k+1} = X^k \times X = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$: $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \underbrace{a_k}_{0 \text{ si } k \neq 1} b_{n-k} = 1 \times \underbrace{b_{n-1}}_{\substack{0\\ \text{si } n-1 \neq k}}$

  Par conséquent : $c_n = 0$ si $n - 1 \neq k$ *i.e.* si $n \neq k+1$ et si $n = k+1$: $c_{k+1} = 1 \times b_k = 1$.