III Anneaux

1 Généralités

Définition 1

Soit A un ensemble muni de deux lois de compositions internes $+$ et $\times$. On dit que $(A,+,\times)$ est un *anneau* si :

i)

ii) La loi $\times$: • •

iii)

Si de plus, $\times$ est commutative, on dit que l'anneau est *commutatif*.

Exemple 1 — $(\mathbb{Z},+,\times)$, $(\mathbb{Q},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$, $(\mathbb{C},+,\times)$ sont des anneaux commutatifs.

Définition 2

Un *corps* est un anneau commutatif, non réduit à $\{0\}$ et dans lequel tout élément autre que 0 est inversible.

Exercice 1 — Les anneaux suivants sont-ils des corps : **a)** $(\mathbb{Z},+,\times)$ **b)** $(\mathbb{Q},+,\times)$ **c)** $(\mathbb{R},+,\times)$ **d)** $(\mathbb{C},+,\times)$

Exercice 2 — Soit $(A,+,\times)$ un anneau $a,b\in A$ et $n\in\mathbb{Z}$. Montrer : **a)** $a\times 0_A=0_A$ **b)** $(-a)\times b=-(a\times b)$ **c)** $(na)\times b=n(a\times b)$

Théorème 1 : Règles de calcul

Soit $(A,+,\times)$ un anneau et soient $a,b\in A$. $\boxed{\text{Si } a\times b=b\times a}$ alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

• •

Définition 3

Soit $(A,+,\times)$ un anneau. On note $U(A)$ l'ensemble des éléments de A inversibles pour $\times$.

Exemple 2 — • $U(\mathbb{Z})=$ • $U(\mathbb{R})=$ • $(U(A),\times)$ est :

2 Sous-anneaux

- **Cadre.** • $(A,+,\times)$ est un anneau. • B est une partie de A.

Définition 4

On dit que B est un *sous-anneau* de A si :

i) *ii)* *iii)*

Exemple 3 — $\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ lui-même sous-anneau de $\mathbb{R}$, lui-même sous-anneau de $\mathbb{C}$.

Exemple 4 — L'ensemble $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un anneau pour la multiplication et l'addition des fonctions. Dans cet anneau l'ensemble des fonctions dérivables est un sous-anneau.

3 Morphisme d'anneaux

- **Cadre.** $(A,+,\cdot)$ et $(B,+,\times)$ sont des anneaux

Définition 5

Une application $f:A\longrightarrow B$ est un *morphisme d'anneaux* si :

i) *ii)* *iii)*

- **Remarque.** Un morphisme d'anneau est en particulier un morphisme de groupes entre $(A,+)$ et $(B,+)$.
- **Retenir.** Si f est un morphisme d'anneau : $\boxed{f \text{ est injectif ssi } \operatorname{Ker} f=\{0_A\}}$.
- **Vocabulaire.** Un *isomorphisme d'anneaux* est un morphisme d'anneau bijectif.

Exemple 5 — Trouver tous les morphismes de corps f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ tels que : $f(x)=x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

4 Anneaux intègres

Définition 6

Un anneau commutatif non nul $(A,+,\times)$ est *intègre* si pour tous $x,y\in A$:

- **Remarque.** Dans un anneau intègre si $x\neq 0_A$, l'égalité : $x\times y=x\times z$ impose : $y=z$

Exemple 6 — **1.** $\mathbb{Z}$ est un anneau intègre **2.** Tout corps est un anneau intègre : en particulier $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ le sont

Exercice 3 — Montrer que l'anneau $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas intègre.