1 Construction de l'ensemble des polynômes

Définition 1

Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang *i.e.* de la forme $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, 0, \dots)$
L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{K}[X]$.

- **Remarque.** Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont la même liste de coefficients.
- **Vocabulaire.** On appelle :
  - *Polynôme constant* tout polynôme $(\lambda, 0, 0, \dots)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Un tel polynôme est simplement noté λ.
  - *Polynôme nul* le polynôme $0 = (0, 0 \dots)$.

Définition 2

Soient $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}, Q = (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$. On définit la somme et le produit de P et Q par :

- $P + Q \underset{\text{déf.}}{=} (a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}}$
- $P \times Q \underset{\text{déf.}}{=} (c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ où pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\quad c_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

Exercice 1 — Vérifier que : **a)** $P+Q$ et PQ sont bien des polynômes **b)** Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$: $\quad \lambda \times P = (\lambda a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Théorème 1

$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif d'éléments neutres le polynôme nul 0 pour + et le polynôme constant 1 pour $\times$.

Exercice 2 — Démontrer le théorème.

Exercice 3 — On pose : $\quad X \underset{\text{déf.}}{=} (0, 1, 0, \dots)$. Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\quad X^k = (\underset{\underset{0}{\uparrow}}{0}, \underset{\underset{1}{\uparrow}}{0}, \dots, 0, \underset{\underset{k}{\uparrow}}{1}, 0, \dots)$.

2 La notation polynômiale

Notation polynomiale

On note ...	pour ...
X	$(0, 1, 0, \dots)$
X^k	$(\underset{\underset{0}{\uparrow}}{0}, \underset{\underset{1}{\uparrow}}{0}, \dots, \underset{\underset{k}{\uparrow}}{1}, 0, \dots)$
$P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$	$P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$
λ	$(\lambda, 0, 0, \dots) = \lambda X^0$
0	$(0, 0, \dots)$

Opérations dans $\mathbb{K}[X]$: pour $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$

- *Somme.* $\quad P + Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k + b_k) X^k$
- *Produit.* $\quad P \times Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k \quad$ où : $\quad \boxed{c_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}}$
- *Produit par $\lambda \in \mathbb{K}$.* $\quad \lambda P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \lambda a_k X^K$

Exemple 1 — Calculer PQ pour $P = 4 - 2X$ et $Q = 1 + 2X - 3X^2$.

Exemple 2 — Soit $n \in \mathbb{N}$.

A partir de l'égalité $\quad (X+1)^{2n} = (X+1)^n (X+1)^n, \quad$ démontrer l'*identité de Vandermonde* : $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.