I Rolle et égalité des accroissements finis

1 Théorème de Rolle

Théorème 1

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :

i) *ii)* *iii)*

Alors :

Exercice 1 ♥ — Démontrer ce théorème en commençant par représenter graphiquement la situation.

En pratique : utiliser le théorème de Rolle

Exemple 1 *SF 7* — Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que : $4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x = \alpha + \beta + \gamma$.

Exemple 2 *SF 6* ♥ — Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ trois fois dérivable, telle que $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$. Montrer que f''' s'annule

Exemple 3 *SF 6* ♥ — Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ $(n \geq 1)$. On suppose que f s'annule en au moins $n+1$ points distincts. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule.

2 Egalité des accroissements finis

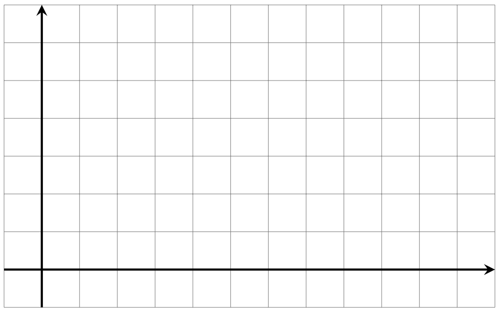
Théorème 2

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :

i)

ii)

Alors :



- **Graphiquement.**

- **Remarque.** En général on ne connaît pas explicitement le point c

Exercice 2 *Ex. 3.1 et 3.2, banque INP* — **1.** ♥ Démontrer le théorème de l'égalité des accroissements finis.
2. ♥ En utilisant l'égalité des accroissements finis, démontrer le théorème de la limite de la dérivée.

SF 8 : utilisation pour établir des inégalités

Exemple 4 *La suite harmonique diverge (Preuve nº 2)* — Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$ **b)** En déduire : $H_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

3 Variations et convexité d'une fonction f dérivable sur I

- **Cadre.** $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I.

Exercice 3 *Inégalité des accroissements finis* — On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in I$. Montrer que f est k-lipschitzienne sur I.

Exercice 4 — Démontrer que f est croissante sur I ssi $f' \geq 0$ sur I.

Exercice 5 — Démontrer que f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I.

Théorème 3

f est strictement croissante sur I si et seulement si :
• $\forall x \in I, \quad f'(x) \geq 0$ et •

- **Remarque.** Le théorème s'applique en particulier si : • f' ne s'annule pas • f' s'annule un nombre fini de fois

Exemple 5 — Justifier la stricte monotonie sur $\mathbb{R}$ des fonctions : **a)** $f : x \mapsto \operatorname{th} x - x$ **b)** $g : x \mapsto x + \cos x$