Exemples de base

Loi, espérance et variance

1 SF 1 On lance un dé équilibré et on note X le résultat obtenu. Déterminer la loi de X.

2 SF 1 On lance une pièce n fois de suite. On note X la variable aléatoire égale au numéro du premier lancer qui donne pile, si l'on obtient au moins un pile, et qui vaut $n+1$ si l'on n'obtient aucun pile. On suppose que la pièce donne pile avec probabilité $p \in]0,1[$.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance de X.

3 SF 1 *Ex. 109.1, banque INP* Une urne contient deux boules blanches et $n-2$ boules rouges que l'on tire une à une sans remise. On note X le rang de sortie de la première boule rouge. Déterminer la loi de X.

4 SF 1 On tire successivement et sans remise deux boules dans une urne de n boules numérotées de 1 à n. On note X le plus grand des deux numéros obtenu. Déterminer la loi de X.

5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1,n]\!]$. Montrer que pour tout $m \in [\![1,n]\!]$:

$$E(X) \le m - 1 + nP(X \ge m)$$

6 On lance deux fois un dé équilibré. En moyenne, combien vaut la somme des deux résultats ?

7 SF 2 On lance un dé équilibré, on note X le résultat obtenu. Calculer : $E(X^2)$ et $E(e^X)$.

8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que X est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ et que $P(X=k) = \lambda k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

a) Calculer λ

b) Calculer $E(X)$

c) Calculer $V(X)$ *On pourra utiliser :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Lois usuelles

9 Un gardien possède n clés et doit ouvrir une porte dans le noir. On suppose qu'il n'utilise jamais deux fois la même clé. Combien en moyenne doit-il essayer de clés ?

10 Soit X_n de loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue. Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E\left(f\left(\frac{X_n}{n}\right)\right)$.

11 Soit $n \ge 2$ et Z de loi uniforme sur $\mathbb{U}_n$. Calculer : $E(Z)$ et $E(\arg Z)$.

Indépendance

12 SF 1 Soient $X_1,\dots,X_n$ indépendantes des lois $\mathscr{B}(p_1)$, $\dots$,$\mathscr{B}(p_n)$. Trouver la loi de $Z = X_1 \dots X_n$.

Loi conjointe, loi conditionnelle

13 On tire simultanément 2 boules dans une urne contenant 3 boules jaunes, une noire et 6 rouges. Déterminer la loi de (X,Y) où X est le nombre de boules jaunes et Y le nombre de boules noires obtenues.

14 SF 4 On dispose de n urnes $U_1,\dots,U_n$. Pour $1 \le k \le n$, l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule au hasard dans l'urne choisie. On note X est le numéro de l'urne choisie et Y le numéro de la boule choisie.

a) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = i\}$.

b) En déduire la loi de Y puis son espérance.

Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev

15 SF 13 Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires réelles définies sur Ω, **indépendantes et de même loi**. On note m leur espérance m et σ leur écart-type et on pose : $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, établir :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Grands classiques

Espérance et variance

16 SF 2 Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction concave et X une variable aléatoire à valeurs dans I

a) Montrer que $E(X) \in I$

b) Montrer que : $E\big(f(X)\big) \le f\big(E(X)\big)$

17 Soit X une variable aléatoire réelle telle que $E(X) = 0$. Montrer que : $E\big(|X|\big) \le \sqrt{V(X)}$.

18 Soit σ une variable aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble S_n des permutations de $[\![1,n]\!]$.

a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On pose $A_i = \{\sigma(i) = i\}$. Calculer $P(A_i)$.

b) On note F le nombre de points fixes de σ. Calculer $E(F)$

Somme de variables aléatoires indépendantes

19 SF 5 Soient X et S deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé. On suppose que $X \sim \mathscr{B}(p)$ et $S \sim \mathscr{B}(n,p)$. Montrer que la variable aléatoire $T = S + X$ suit la loi $\mathscr{B}(n+1,p)$.

20 SF 5 Soit X, Y indépendantes de loi $\mathscr{U}([\![1,n]\!])$. Soit $k \in [\![2,2n]\!]$. Etablir :

$$P(X+Y=k) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{n^2} & \text{si } 2 \le k \le n \\[2ex] \dfrac{2n-k+1}{n^2} & \text{si } n+1 \le k \le 2n \end{cases}$$

Loi conjointe, loi conditionnelle

21 SF 4 *cf. Ex. 98, banque INP* Une lionne affamée attaque chaque membre d'un troupeau de n gazelles. Les attaques sont indépendantes et chaque gazelle est attrapée avec probabilité $p \in]0,1[$.

1. Donner (sans calcul) la loi du nombre X de gazelles attrapées par la lionne.

   Loin d'être rassasiée, la lionne attaque une seconde fois, dans les mêmes conditions, les $n-X$ gazelles qu'elle n'a pu attraper au cours de la première série d'attaques. On note Y le nombre de gazelles attrapées cette fois.
2. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Donner (sans calcul) la loi conditionnelle de Y sachant $\{X=i\}$.
3. On pose $Z = X+Y$.
   Montrer que Z suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, 2p-p^2)$.

Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev

22
1. Démontrer l'inégalité de Markov
2. Démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

23 SF 12 Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(n,p)$. En appliquant l'inégalité de Markov, à une variable judicieusement choisie, montrer :

$$\forall t, \varepsilon > 0, \quad P\left(X - np \geq n\varepsilon\right) \leq e^{-nt\varepsilon} E\left(e^{t(X-np)}\right)$$

24 SF 13
1. Soit $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$ fixés. On se donne une variable aléatoire S_n de loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$.
   a) Montrer que : $|p_n(x) - f(x)| \leq E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right)$.
   b) Justifier l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
   $$\forall x, y \in [0,1], \quad |x-y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$
   c) Pose : $A = \left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| < \alpha\right\}$.
   Montrer que : $E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_A\right) \leq \varepsilon$.
   d) En déduire que : $|p_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$.
2. Montrer que la suite (p_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$ *i.e.* : $\|f - p_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Démonstrations

• **Cadre.** X, Y sont des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω, P).

25 Pour tout $A \subset X(\Omega)$ on pose : $P_X(A) = P(X \in A)$.
Montrer que P_X est une probabilité sur $X(\Omega)$.

26 On suppose que X, Y sont à valeurs dans $\mathbb{C}$.
1. Montrer que : $E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$
2. Montrer que $E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$ pour tous $a, b \in \mathbb{C}$.
3. Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On suppose que X est à valeurs dans I.
   Montrer que : $E(f(X)) = \sum_{k\in X(\Omega)} f(k) P(X=k)$

27 On suppose que X est à valeurs réelles et que $V(X) \neq 0$.
On pose : $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$.
Montrer que : $E(Y) = 0$ et $V(Y) = 1$.

28 Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{U}\left([\![1,n]\!]\right)$.
Démontrer que : $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

29 Démontrer la formule donnant l'espérance de la loi $\mathscr{B}(n,p)$ dans le cas où $p > 0$.

30 On suppose X et Y réelles. Montrer que
$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2(E(XY) - E(X)E(Y))$$

31 Donner les deux expressions de la covariance et démontrer l'égalité entre ces deux expressions.

32 On suppose que X, Y sont à valeurs dans $\mathbb{C}$. Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.