Exemples de base

1 SF 7 On lance 4 fois un dé équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 numéros différents ?

2 *Dé truqué* On lance un dé dont la probabilité d'obtenir la face k est proportionnelle à k.
Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

3 Une urne contient 7 boules jaunes et 3 boules noires. On effectue deux tirages successifs sans remise dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit jaune ?
2. La deuxième boule tirée est jaune. Quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été noire ?

4 On dispose de n urnes $U_1, U_2, \dots, U_n$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?
2. On observe que la boule tirée est blanche.
   Pour $k \in [\![1, n]\!]$, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_k ?

5 Un laboratoire propose un test de dépistage d'une maladie : lorsque le test est appliqué à une personne malade, il est positif dans 99.8% des cas ; lorsqu'il est appliqué à une personne saine, il est négatif dans 99.6% des cas. D'autre part, on sait qu'une personne sur 100 000 est malade.
Le test est-il fiable ? On répondra en se basant sur la probabilité d'être malade sachant que le test est positif.

6 SF 11 On effectue trois tirages successifs et sans remise d'une boule dans une urne contenant 4 boules blanches et 6 boules noires.

1. Calculer la probabilité d'obtenir trois boules blanches.
2. On effectue cette fois-ci des tirages *avec* remise. Calculer la probabilité d'obtenir trois boules blanches.

7 Soit $n \geq 2$.
On lance n fois de suite une même pièce équilibrée.

1. A partir de quelle valeur de n la probabilité que les deux faces de la pièce apparaissent au cours des n lancers est-elle supérieure ou égale à 0,9 ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au plus un pile au cours des n lancers.

Grands classiques

8

1. Enoncer et démontrer la formule des probabilités totales.
2. Enoncer et démontrer la formule de Bayes.

9 On considère deux urnes : l'urne U_1 contient 3 boules blanches et 1 noire, l'urne U_2 contient 1 boule blanche et 4 noires. On effectue des tirages successifs comme suit : on choisit d'abord une urne au hasard. On tire une boule dans cette urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne. Si la boule tirée est blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 ; sinon le tirage suivant se fait dans U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité que le n^{e} tirage donne une boule blanche. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$

10 SF 11 Un gardien possède n clés pour ouvrir une porte dans le noir : il essaie les clés au hasard une après l'autre et n'utilise jamais deux fois la même clé. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
Avec quelle probabilité ouvre-t-il la porte au k^{e} essai ?

Démonstrations

- **Cadre.** (Ω, P) est un espace probabilisé et $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$

11 Montrer que :

1. $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.
2. $P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

12 Enoncer et démontrer la formule des probabilités composées.

13 Montrer que si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.