Exemples basiques

1 Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $\vec{w} = (-5,-4,-1)$ est-il combinaison linéaire de $\vec{u} = (1,2,1)$ et $\vec{v} = (1,-1,-1)$?

2 Dans $\mathbb{R}[X]$, $P = X^2 + 3X + 1$ est-il combinaison linéaire de
$$A = 1 + X, \quad B = 1 + 2X + X^2 \quad \text{et} \quad C = X + X^2 \quad ?$$

3 SF 1 Montrer que $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + 4z = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4 On pose
$$F_1 = \{(x,y) \mid x + y = 2\} \quad \text{et} \quad F_2 = \left\{(x,y) \mid y = x^2\right\}$$
Sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

5 SF 1 Montrer que
$$F = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

6 SF 1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

7 SF 1

1. On pose $F = \left\{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + d = 0\right\}$.
   Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$
2. On pose $F = \left\{(X-1)(aX+b)\,;\,(a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
   Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$
3. Montrer que l'ensemble F des solutions de $y'' + y = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
4. Même question avec l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y'' - 8y' + 15y = 0$.
5. On considère l'ensemble F des suites réelles u vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$$
   Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

8 Montrer que $\mathrm{Vect}(1, X, 1+X, 2X-3, 3X, 0) = \mathrm{Vect}(1, X)$

9 Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\big((1,0,2),(1,1,3),(2,-3,1)\big)$ est-elle libre ?

10 SF 2 Dans $\mathbb{R}_2[X]$ on pose
$$P = -1 + 3X + 2X^2, \quad Q = X + X^2 \quad \text{et} \quad R = -X - 2X^2$$
La famille (P,Q,R) est-elle libre ?

11 SF 2 Montrer que les fonctions
$$f_1 : x \mapsto \cos x,\ f_2 : x \mapsto \sin x,\ f_3 : x \mapsto x\cos x \text{ et } f_4 : x \mapsto x\sin x$$
forment une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

12 Montrer que les fonctions
$$f_1 : x \mapsto \cos x, \quad f_2 : x \mapsto \sin x \quad \text{et} \quad f_3 : x \mapsto \cos(x - \frac{\pi}{3})$$
forment une famille liée de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

13 SF 3 Donner une base de :

a) $\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y - z = 0 \text{ et } x - y + t = 0\right\}$

b) $\{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(X+1) = XP'\}$

14 Compléter $\big((1,0,1)\big)$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

15 Déterminer la dimension de :
$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(0)\}$$

16 Montrer que
$$F = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n\right\}$$
est un plan vectoriel.

17

1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}_1$ des solutions de l'équation différentielle $(1+t^2)y' - ty = 0$ est une droite vectorielle.
2. Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}_2$ des solutions de l'équation différentielle $y'' - 8y' + 15y = 0$ est un plan vectoriel.

18 SF 4 Montrer que $((2,3),(4,5))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

19 SF 4 Montrer que $(X + 2X^2\ ,\ 1 + 2X\ ,\ 2 + X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

20 SF 4 Soit $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $((X-a)^k)_{0 \le k \le n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

21 SF 4 Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts.
On note $L_1, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés aux x_i.
Montrer que $(L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

22 SF 5 Montrer que : $\mathrm{Vect}(X-1\,,\,X+2) = \mathbb{R}_1[X]$.

23 Déterminer le rang de :

a) $\mathscr{F}_1 = ((1,1,0),(0,0,1))$

b) $\mathscr{F}_2 = ((1,1,0),(0,0,1),(1,1,1))$

c) $\mathscr{F}_1 = (1\,,X\,,X^2\,,X^3)$

d) $\mathscr{F}_2(X\,,2X\,,3X\,,4X)$

e) $\mathscr{F}_3 = (X+1\,,X+2\,,X+3\,,X+4)$

24 SF 6 On pose
$$F = \mathrm{Vect}\big((1,0,0),(0,1,0)\big) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}\big((1,1,0),(1,0,1)\big)$$

a) Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$

b) Trouver une base de $F \cap G$.

25 SF 7 Montrer que
$$F = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = 0\right\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$$
sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

26 SF 7 Montrer que
$$F = \mathrm{Vect}(2X+1) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(X^2 + X, X^2 + X + 1)$$
sont supplémentaires dans $\mathbb{K}_2[X]$.

27 SF 7 Soit $B \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \ge 1$.
On pose : $B\mathbb{K}[X] = \{BQ\,;\,Q \in \mathbb{K}[X]\}$. Montrer que :
$$\mathbb{K}[X] = B\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X]$$

28 SF 8 Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, trouver un supplémentaire de
$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$$

Grands classiques

29 Montrer que si :

- $(u_1,\ldots,u_n,u_{n+1})$ est une famille génératrice de$E$;
- u_{n+1} est combinaison linéaire de $(u_1,\ldots,u_n)$

alors $(u_1,\ldots,u_n)$ est encore une famille génératrice de E.

30 Montrer que si :

- $(u_1,\ldots,u_n)$ est une famille libre de E ;
- u_{n+1} n'est pas combinaison linéaire de $(u_1,\ldots,u_n)$

alors $(u_1,\ldots,u_n,u_{n+1})$ est encore une famille libre de E.

31 Montrer qu'une famille $(P_0,\ldots,P_n)$ de polynômes de degrés étagés est libre

32 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, démontrer que : $\dim \mathcal{S}_n(K) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathcal{A}_n(K) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

33 On suppose que E est dimension finie n. Soit F un sous-espace de E. Montrer que F est de dimension finie.

34 Soit $\mathcal{F} = (u_1,\ldots,u_p)$ une famille finie de vecteurs de E.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(u_1,\ldots,u_p) \leq p$.
2. Montrer que $\mathrm{rg}(u_1,\ldots,u_p) = p$ ssi $\mathcal{F}$ est libre.

35 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note f_k la fonction $f_k : x \mapsto \sin(k+x)$. Soit $n \geq 2$. Trouver le rang de la famille $(f_1,\ldots,f_n)$

36 *SF 7* Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ montrer que l'ensemble F des fonctions paires et l'ensemble G des fonctions impaires sont des sous-espaces supplémentaires.

Démonstrations

Cadre. E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

37 **a)** Démontrer que toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E

b) Montrer que la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est en général pas un sous-espaces vectoriels de E.

38 Soit $\mathcal{F} = (u_1,\ldots,u_n)$ une famille finie de vecteurs de E.

1. Montrer que $\mathrm{Vect}\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriels de E.
2. Montrer que $\mathrm{Vect}\mathcal{F}$ est le plus petit sous-espace vectoriels de E qui contienne $\{u_1,\ldots,u_n\}$

39 Soit $\mathcal{F} = (u_1,\ldots,u_n)$ une famille finie de vecteurs de E. Montrer qu'il y a équivalence entre :

i) Tout vecteur de E est, de manière unique, combinaison linéaire de $\mathcal{F}$.

ii) $\mathcal{F}$ est à la fois libre et génératrice.

40

1. Montrer que par récurrence sur n que dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute famille à $n+1$ éléments est liée.
2. En déduire que si E possède une famille génératrice finie, alors toutes ses bases sont finies et ont le même cardinal.
3. Déduire aussi de la question 1 que si E est de dimension finie n, alors toute famille libre de E a au plus n éléments et toute famille génératrice de E a au moins n élément.

41 *Démonstration par récurrence* descendante *du théorème de la base incomplète*. On suppose que E possède une famille génératrice finie $\mathcal{G}$. Pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, on note $\mathcal{H}_p$ la propriété : « Toute famille libre $\mathcal{L} = (\vec{\ell}_1,\ldots,\vec{\ell}_p)$ à p éléments peut être complétée en une base à l'aide de vecteurs de $\mathcal{G}$ ».

1. *Initialisation : cas $p=n$.* Montrer que si $\mathcal{L} = (\vec{\ell}_1,\ldots,\vec{\ell}_n)$ est libre, alors c'est une base de E.
2. *Hérédité. Soit $p \in [\![1,n]\!]$. On suppose $\mathcal{H}_p$ vraie et on souhaite montrer que $\mathcal{H}_{p-1}$ est vraie.* Soit $\mathcal{L} = (\vec{\ell}_1,\ldots,\vec{\ell}_{p-1})$ une famille libre à $p-1$ éléments. Montrer que $\mathcal{L}$ peut être complétée en une base à l'aide de vecteurs de $\mathcal{G}$.

42 Démontrer la formule de Grassmann

43 Montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

44 On suppose que E est dimension finie. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E possède au moins un supplémentaire.